Kapitel 5

Lite mer matematik

(Kapitel 5 i PR, 'Uncertainty and Consumer Behavior', ingår ej i kursen)

Den matematik som presenteras här behöver ni inte behärska lika väl som det som presenterades i kapitel 1. Men många senare exempel blir (förhoppningsvis) tydligare om vi använder vissa redskap från detta kapitel.

5.1 Två Funktioner

Som vi har sett är det ibland behövligt att kunna modellera ekonomiska samband som inte är linjära. Därför kompletterar vi nu den icke-linjära funktionen i avsnitt (2.6) (hyperbeln) med ytterligare två matematiska funktioner.

5.1.1 Den Kvadratiska Funktionen

En mycket användbar funktion är den kvadratiska:

$$y = x^2. \tag{5.1}$$

Det är vanligt att man använder denna typ av funktion för att beskriva hur produktionskostnaderna ökar med den producerade kvantiteten eller hur miljöskadorna stiger när föroreningarna blir mer omfattande.

(a) Illustrera funktionen i (5.1) i en figur med y på den vertikala axeln och x på den horisontella. Välj värden på x från 1 till 10, heltal mot slutet men lite mindre intervall i början.

När vi använder denna typ av funktion är vi ofta intresserade av effekterna på y av en liten förändring i x. Det kan t ex röra sig om hur mycket kostnaden ökar när produktionen ökar marginellt (med en enhet). Vi kommer att kalla detta för marginalkostnaden. Den matematiska motsvarigheten till marginalkostnaden är lutningen på kostnadskurvan. För en mer precis information använder vi derivatan för att beskriva lutningen. Derivatan för (5.1) är

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \tag{5.2}$$

Detta innebär att y förändras med ungefär $2x$ (per enhets förändring i x), när det sker en liten ökning i x. För att betona att detta gäller för *små* förändringar i x använder vi 'd' istället för 'Δ', som vi annars brukar använda för förändringar.[1]

(b) Beräkna derivatan för värden på x mellan 1 och 10. Illustrera i en figur.

Låt oss nu generalisera funktionen i (5.1) något:

$$y = a + bx^2, \tag{5.3}$$

där a och b är konstanter. Vi deriverar nu term för term och resultatet blir

$$\frac{dy}{dx} = b2x = 2bx. \tag{5.4}$$

Derivatan av konstanten a är alltså lika med noll (den förändras inte när x förändras). Konstanten b står kvar framför derivatan av x^2 i samma term. Man brukar skriva den numeriska koefficienten först.

(c) Beräkna derivatorna

$$(i) \quad y = 5x^2, \quad (ii) \quad y = 17 - 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 \quad \text{och} \quad (iii) \quad y = (a - bx)x - cx^2$$

Svar till uppgifter i avsnitt 5.1.1

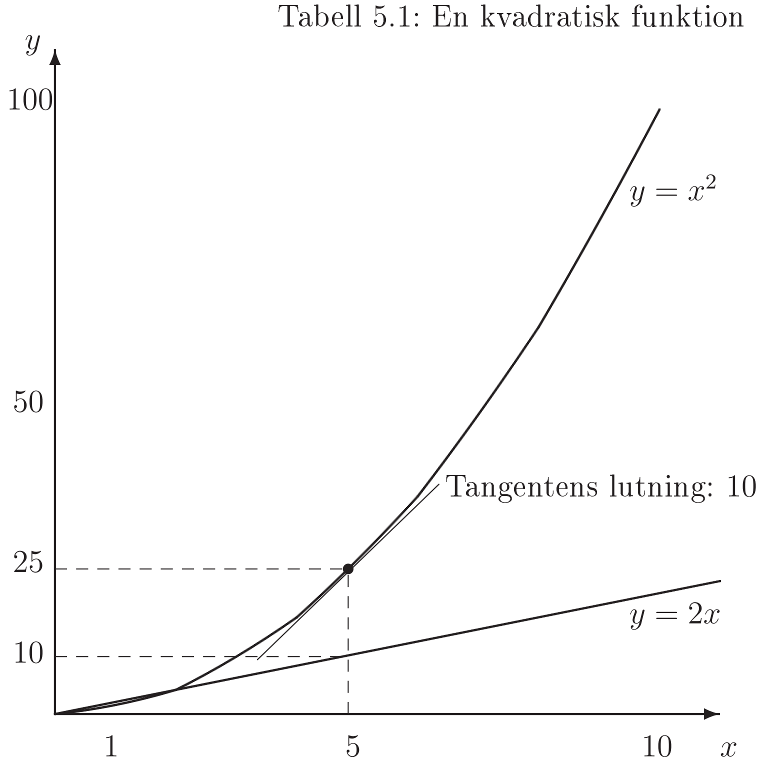
(a) I Tabell 5.1 finns några värden på x, tillsammans med de motsvarande värdena på x^2. Dessa värden har plottats i Figur 5.1. Notera den karakteristiska formen på kurvan: den är ganska flack i början men blir sedan brantare när x växer.

(b) Den tredje raden i Tabell 5.1 visar några värden på derivatan. Notera att derivatan själv är en linjär funktion (som också visas i Figur 5.1). Detta kommer att förenkla många beräkningar för oss. I koordinaten (5,25) är lutningen på $y = x^2$ lika med 10, vilket också är höjden på linjen för derivatan ($y = 2x$) i den punkten.

[1] Ett alternativt sätt att skriva derivatan är $f'(x) = 2x$, om $y = f(x) = x^2$. Här utläses $y = f(x)$ som att 'y är en funktion av x'.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5	6	7	8	9	10
x^2	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	12.25	16	25	36	49	64	81	100
$2x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14	16	18	20

Tabell 5.1: En kvadratisk funktion



Figur 5.1: En kvadratisk funktion

(c) Vi får:

$$(i) \quad \frac{dy}{dx} = 5 \cdot 2x = 10x \quad \text{och} \quad (ii) \quad \frac{dy}{dx} = -3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x = -3x.$$

I det tredje fallet skriver vi först om funktionen till $y = ax - bx^2 - cx^2$. Vi deriverar sedan term för term:

$$(iii) \quad \frac{dy}{dx} = a - b2x - c2x = a - 2bx - 2cx = a - 2(b + c)x.$$

x	0,25	0,64	1	4	9	16	25	36	100
$y = 4\sqrt{x}$	2	3,2	4	8	12	16	20	24	40
$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{2\sqrt{x}}$	4	2,5	2	1	0,67	0,5	0,4	0,33	0,2

Tabell 5.2: En Kvadratrotsfunktion

5.1.2 Kvadratrots-Funktionen

Vi såg att den kvadratiska funktionen har en lutning som stiger när x ökar. Nu går vi till exempel på motsatsen till detta, dvs att lutningen minskar när x ökar. I funktionen

$$y = a\sqrt{x} \tag{5.5}$$

kallas uttrycket $\sqrt{x}$ för kvadratroten ur x (medan a är en konstant). Kvadratroten ur x definieras som det tal som ger x när det multipliceras med sig självt. Alltså:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x.$$

Till exempel har vi $\sqrt{16} = 4$ eftersom $4 \cdot 4 = 16$.[2]

I Tabell 5.2 finns ett antal funktionsvärden för (5.5) vid olika värden på x, under antagandet att $a = 4$. Dessa värden ger en kurva som illustreras i Figur 5.2. Observera att kurvan är mycket brant till en början, och att den senare blir allt flackare.

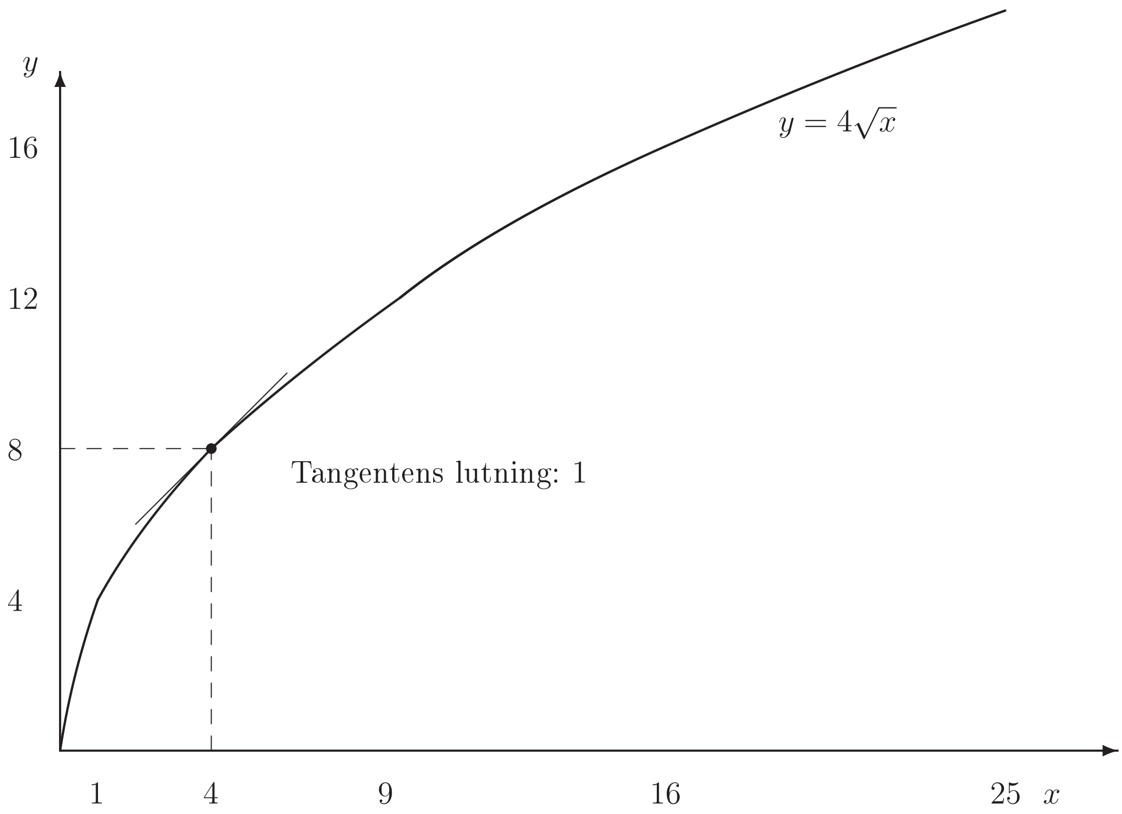
Lutningen på kurvan ges av derivatan till (5.5):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

Tabell 5.2 återger några värden på denna derivata när $a = 4$. Derivatorna bekräftar att lutningen är brant när x litet och att den faller när x ökar. I koordinaten (4,8) är lutningen på kurvan lika med 1.

[2]Man kan också använda beteckningen $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Vi får då

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x.$$



Figur 5.2: En Kvadratrotsfunktion

5.2 Funktioner av två Variabler

En ekonomisk variabel påverkas ofta av flera andra variabler. Den producerade kvantiteten beror t ex både på antalet maskiner och antalet arbetare som används i produktionen. Därför använder vi funktioner av flera variabler. Antag t ex att y är en funktion av två andra variabler, x_1 och x_2. Generellt kan en funktion av två variabler skrivas som

$$y = f(x_1, x_2).$$

Vi kan lägga till några antaganden om denna funktion, t ex att y ökar när x_1 eller x_2 (eller båda) ökar. Som antyddes tidigare kan funktionen vara en produktionsfunktion, där y är den producerade kvantiteten, medan x_1 och x_2 är kvantiteter av produktionsfaktorerna kapital respektive arbete. Antagandet att funktionens värde ökar när argumenten (x_1 och x_2) betyder då helt enkelt att den producerade kvantiteten blir större när mängden insatt kapital och (eller) arbete ökar.

För ett mer specifikt exempel, betrakta funktionen

$$y = x_1 \cdot x_2. \tag{5.6}$$

Detta är helt klart en funktion som är stigande i båda argumenten: ett högre x_1 eller x_2 gör y större. Ett exempel kan återigen vara en produktionsfunktion, men det kan också vara en nyttofunktion, där x_1 och x_2 är kvantiteterna av de varor som konsumeras. En högre konsumtion av någon av dem gör nyttan, y, högre. (Jämför ekvation (3.2).)

En del av egenskaperna hos en funktion av flera (två) variabler kan beskriva med hjälp av så kallade **nivåkurvor**. Sådana kurvor beskriver kombinationer av x_1 och x_2 som ger samma värde till funktionen. Till exempel, innebär punkten[3] $(x_1, x_2) = (2, 2)$ att $y = 2 \cdot 2 = 4$ i funktionen (5.6). Två andra punkter som ger samma y–värde är $(4, 1)$ och $(1, 4)$. Dessa punkter, tillsammans med andra liknande punkter bildar en kurva i planet med x_1 och x_2 på axlarna.[4]

Ett annat exempel på en funktion av två variabler är

$$y = a\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} = a x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}},$$

där a är en konstant. Även här ökar y om x_1 eller x_2 ökar.

[3] Den första siffran är värdet på x_1 och den andra är värdet på x_2.

[4] Indifferenskurvor är exempel på nivåkurvor.