Kapitel 1

Matematik

I detta kapitel repeterar vi den matematik som ni måste behärska för att kunna studera nationalekonomi. Det är:

1. Algebra
2. Räta Linjens Funktion
3. Ekvationslösning

Dessutom kommer vi att använda en del andra matematiska redskap under föreläsningarna. De presenteras i avsnitt 2.6 och kapitel 5. Ni behöver inte behärska dem på samma sätt som det material som gås igenom här, men ni kommer att använda resultaten av t ex deriveringar (vilket för oss tillbaka till materialet i detta kapitel).[1]

1.1 Algebra

Här går vi igenom ett antal regler för hur man kan skriva om matematiska uttryck så att slutresultatet är likvärdigt (ekvivalent) med det uttryck som man började med. Sådana omskrivningar gör man oftast för att förenkla de uttryck man har, så att de ska bli lättare att förstå (eller lättare att arbeta vidare med).

Låt a, b och c vara konstanter. Då gäller följande algebraiska regler (med exempel inom hakparentes):

[1] Några övningar (med facit) finns i slutet av kapitlet.

	Regel	Exempel
(1)	$a + b = b + a$	$[2 + 5 = 5 + 2]$
(2)	$(a + b) + c = b + (a + c)$	$[(2 + 5) + 3 = 5 + (2 + 3)]$
(3)	$a + 0 = a$	$[2 + 0 = 2]$
(4)	$a + (-a) = 0$	$[2 + (-2) = 2 - 2 = 0]$
(5)	$ab = ba$	$[2 \cdot 5 = 5 \cdot 2 = 10]$
(6)	$(ab)c = a(bc)$	$[(2 \cdot 5) \cdot 3 = 2 \cdot (5 \cdot 3)]$
(7)	$1 \cdot a = a$	$[1 \cdot 2 = 2]$
(8)	$aa^{-1} = a\frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1 \qquad (a \neq 0)$	$[2 \cdot 2^{-1} = 2\frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1]$
(9)	$(-a)b = a(-b) = -ab$	$[(-2)5 = 2(-5) = -2 \cdot 5 = -10]$
(10)	$(-a)(-b) = ab$	$[(-2)(-5) = 2 \cdot 5 = 10]$
(11)	$a(b + c) = ab + ac$	$[2(5 + 3) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16]$
(12)	$(a + b)c = ac + bc$	$[(2 + 5) \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 21]$

Här följer några ytterligare exempel där dessa regler används.

1. $8 + x = x + 8$
2. $(3 + 5y) + 2y = 3 + (5y + 2y) = 3 + 7y$
3. $144 + 0 = 144$
4. $32 + (-32) = 32 - 32 = 0$
5. $x\frac{1}{4} = \frac{x}{4} = \frac{1}{4}x$
6. $\left(\frac{x}{y}\right) y = \left(x\frac{1}{y}\right) y = x\left(\frac{1}{y}y\right) = x\left(\frac{y}{y}\right) = x\,(1) = x \cdot 1 = x$
7. $(-4)6 = 4(-6) = -(4 \cdot 6) = -24$
8. $(-7)(-7) = 7 \cdot 7 = 49$
9. $5x(2y+4x) = 5x2y+5x4x = 5\cdot 2xy+5\cdot 4xx = 10xy+20xx = 10xy+20x^2$
10. $3(ay - x) = 3ay - 3x$
11. $-5(2y - 3x) = (-5)(2y + (-3x)) = (-5)2y + (-5)(-3x) =$
    $= -5 \cdot 2y + 5 \cdot 3x = -10y + 15x$

12. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \cdot \underbrace{\frac{\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}}}_{=1} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

13. Vi har

$$\frac{ax}{by} = \frac{c}{d}.$$

Lös ut x, genom att multiplicera båda sidor med $\frac{by}{a}$:

$$\frac{ax}{by}\frac{by}{a} = \frac{c}{d}\frac{by}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x\frac{aby}{aby} = \frac{c}{d}\frac{b}{a}y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{cb}{da}y$$

Den sista punkten var ett exempel på ekvationslösning, vilket vi kommer tillbaka till senare.

1.2 Räta Linjens Funktion

Som nationalekonomer använder matematiska funktioner för att beskriva samband mellan olika ekonomiska variabler. Vi kan till exempel använda en funktion för att beskriva hur ett företags produktionskostnader förändras när den producerade kvantiteten ökar. Ett annat exempel är en funktion som visar hur den efterfrågade kvantiteten på en vara beror på varans pris.

En mycket vanlig funktion är den räta linjens funktion. Den kan skrivas på följande sätt:

$$y = a + bx, \tag{1.1}$$

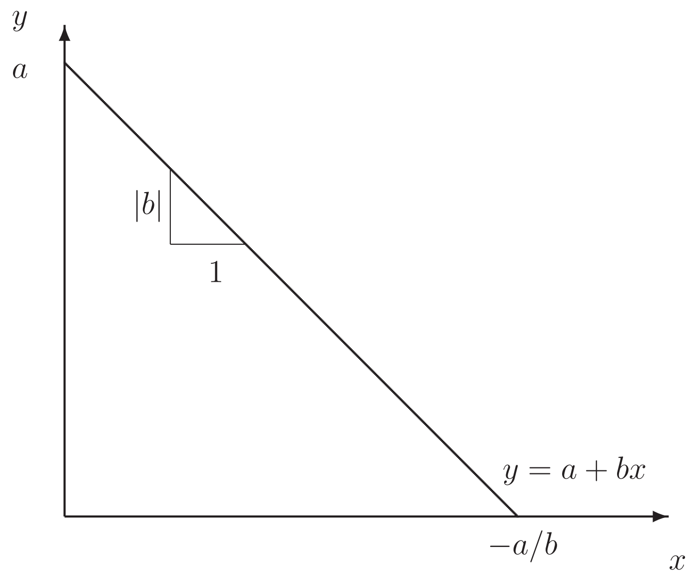
där a och b är konstanter (positiva eller negativa). Här är alltså y en funktion av x: för varje x-värde man sätter in i (1.1) 'producerar' funktionen ett unikt y-värde. Vi kan illustrera denna funktion i en figur med y på den vertikala axeln och x på den horisontella. För att illustrera funktionen markerar vi ut intercepten (skärningarna mellan linjen och axlarna) och lutningen.

Vi börjar med det vertikala interceptet, dvs den punkt där linjen skär y-axeln. Det sker när $x = 0$, så vi sätter in $x = 0$ i (1.1) och får

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = a.$$

Linjens skärning med x-axeln innebär å andra sidan att $y = 0$, vilket betyder att (1.1) kan skrivas som $0 = a + bx$ i den punkten. För att se i vilken punkt detta sker, skriver vi om denna ekvation som $-a = bx$ eller $x = -a/b$. Vi summerar detta som att

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -a/b.$$



Figur 1.1: Rät linje med negativ lutning

Figur 1.1 illustrerar dessa två skärningspunkter i fallet då linjen har en negativ lutning[2]. I Figur 1.2 har linjen istället en positiv lutning. I båda figurerna är $a > 0$, medan $a' < 0$ i Figur 1.2.[3]

För att få fram lutningen ställer vi följande fråga: Hur mycket förändras y när x ökar med en enhet, säg från x_0 till $x_1 = x_0 + 1$? För att svara på frågan sätter vi in de två x-värdena i (1.1) och får $y_0 = a + bx_0$ respektive $y_1 = a + bx_1 = a + b(x_0 + 1)$. Förändringen i y är därför

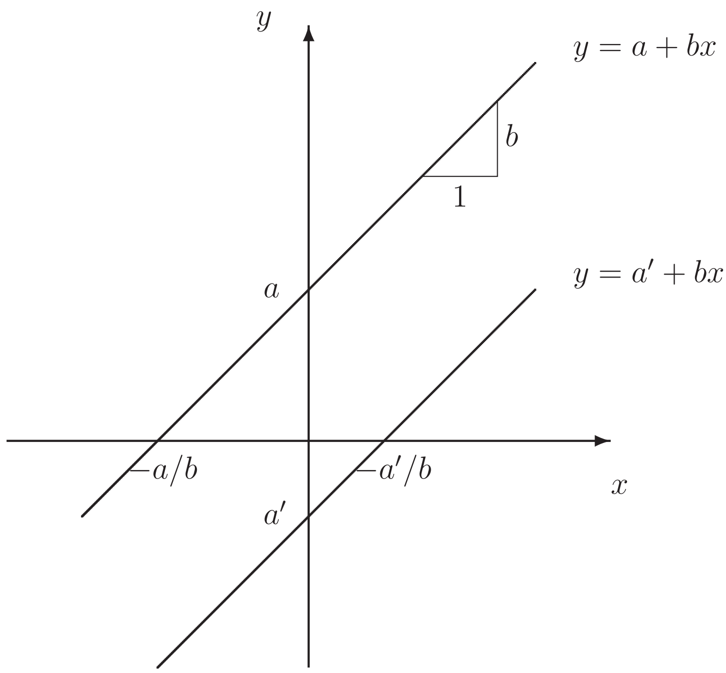
$$y_1 - y_0 = a + bx_1 - a - bx_0 = b\,(x_1 - x_0) = b\,(x_0 + 1 - x_0) = b.$$

För varje enhet som x ökar förändras alltså y med b enheter. Vi kallar b lutningskoefficienten; den illustreras också i Figur 1.1 (där den är negativ) och Figur 1.2 (positiv).[4]

[2]Detta innebär att $b < 0$, som vi strax ska se.

[3]Eftersom det är frågan om räta linjer räcker det med att hitta två punkter för att kunna rita en linje. (Linjen visar (många) kombinationer av x och y som gör att ekvationen är uppfylld.)

[4]I Figur 1.1 har vi $|b|$ (absolutvärdet av b) eftersom sträckans längd inte kan vara negativ.



Figur 1.2: Räta linjer med positiv lutning

För en alternativ förklaring till lutningen kan vi definiera förändringarna $\Delta y = y_1 - y_0$ och $\Delta x = x_1 - x_0$ (där $x_1 - x_0$ kan vara något annat än 1). Istället för $y_1 - y_0 = b\,(x_1 - x_0)$ kan vi då skriva

$$\Delta y = b\Delta x.$$

Division av båda sidor med Δx ger

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = b.$$

Tolkningen av detta uttryck är att för varje enhet som x ökar så förändras y med b enheter.

1.3 Lösning av Ekvationer och Ekvationssystem

Som nationalekonomer analyserar vi ofta ekonomiska problem genom användning av en eller flera ekvationer. Om ekvationerna är linjära går det att lösa ut de okända (endogena) variablerna ur dessa ekvationer. Det mest kända exemplet är förmodligen två-ekvations-modellen för utbud och efterfrågan. Från den modellen kan vi lösa ut jämviktspriset och jämviktskvantiteten. Men innan vi kommer till det börjar vi med att lösa ut den okända variabeln ur *en* ekvation.

1.3.1 Lösning av en Ekvation

En allmän regel för ekvationslösning är att **det man gör på den ena sidan av likhetstecknet måste man också göra på den andra sidan**. Det innebär att följande operationer är tillåtna:

1. att addera samma term till båda sidor av likhetstecknet
2. att subtrahera samma term från båda sidor av likhetstecknet
3. att multiplicera båda sidor med samma faktor
4. att dividera båda sidor med samma faktor

Dessa regler är tydliga och i princip enkla, men det finns alltid en risk för misstag (särskilt om man har bråttom). I de två sista fallen måste man vara extra noggrann och se till att man verkligen tar med allting på båda sidorna när man multiplicerar eller dividerar med någon faktor.

Exempel 1 Som ett första exempel kan vi utgå från följande ekvation.

$$5 + 3x = 17 - x.$$

Här vill vi lösa ut den okända variablen x, för att se vilket värde på x som gör att ekvationen är uppfylld. Varje sida har en rent numerisk term och en x-term. Vi börjar med att samla x-termer på en sida och de numeriska på den andra. För att eliminera x från den högra sidan adderar vi x till båda sidor:

$$5 + 3x + x = 17 - x + x.$$

Förenkling ger[5]

$$5 + 4x = 17.$$

Nästa steg är att eliminera 5 från den vänstra sidan, genom att subtrahera 5 från båda sidor:

$$5 + 4x - 5 = 17 - 5.$$

Efter förenkling får vi[6]

$$4x = 12.$$

[5] När vi blir lite säkrare säger vi att vi flyttar över x:et från höger sida och byter tecken: $5 + 3x + x = 17$.

[6] När vi blir lite säkrare säger vi att vi flyttar över 5 från vänster sida och byter tecken: $4x = 17 - 5$.

Det sista steget är att göra x ensamt på vänster sida. Detta uppnås genom att man dividerar båda sidor med 4:

$$\frac{4x}{4} = \frac{12}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{4}x = 3,$$

vilket reduceras till

$$x^* = 3.$$

där '$*$' indikerar lösningen till ekvationen.

Exempel 2 Ett annat exempel utgår från ekvationen

$$\frac{100 - 3x}{4} = \frac{40 - 2x}{3}.$$

För att få bort *nämnarna* (uttrycken under divisionslinjerna), multiplicerar vi båda sidor med 3 och med 4. Dessutom sätter vi parenteser runt *täljarna* (uttrycken över divisionslinjerna):

$$\frac{(100 - 3x)}{4} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{(40 - 2x)}{3} \cdot 3 \cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(100 - 3x) \cdot 3 \cdot 4}{4} = \frac{(40 - 2x) \cdot 3 \cdot 4}{3}.$$

Förenkla genom att 'kvitta' bort nämnarna:

$$\frac{(100 - 3x) \cdot 3}{1} = \frac{(40 - 2x) \cdot 4}{1}.$$

Förenkla ytterligare:

$$(100 - 3x) \cdot 3 = (40 - 2x) \cdot 4.$$

Parentesen på den vänstra sidan måste vara med, så att båda termerna inom parentesen multipliceras med 3. På samma sätt blir allt inom parentes multiplicerat med 4 på den högra sidan. Nu tar vi bort parenteserna och utför multiplikationerna term för term:

$$100 \cdot 3 - 3x \cdot 3 = 40 \cdot 4 - 2x \cdot 4.$$

Förenkla:

$$300 - 9x = 160 - 8x.$$

För att samla termer av samma sort, subtraherar vi 160 och adderar $9x$ på båda sidor:

$$300 - 9x - 160 + 9x = 160 - 8x - 160 + 9x.$$

Förenkling ger

$$300 - 160 = -8x + 9x$$

eller

$$x^* = 140.$$

1.3.2 Lösning av ett system med två ekvationer

Ekonomiska modeller innehåller ofta flera obekanta variabler. Då behöver vi också flera ekvationer för att hitta de obekanta värdena.

Exempel 1 Utgå från följande system av två ekvationer[7]:

$$y = 100 - 3x \tag{1.2}$$

$$y = 2x \tag{1.3}$$

Vi söker värden på x och y som gör att systemet är uppfyllt (x^* och y^*). Lösningen av problemet underlättas av att vi direkt kan använda (1.3) i (1.2) för att eliminera y:

$$2x = 100 - 3x$$

Flytta över $3x$:

$$5x = 100$$

Dividera med 5:

$$x^* = 20$$

Användning av detta i (1.3) ger

$$y^* = 2 \cdot 20 = 40.$$

Exempel 2 Nu har vi ekvationssystemet

$$ax + by = c \tag{1.4}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{b} \tag{1.5}$$

För att hitta de värden på x och y som löser detta system kan vi börja med att lösa ut y från (1.5). Multiplicera båda sidor med x (eller 'flytta över' x):

$$\frac{y}{x}x = \frac{a}{b}x \quad \Leftrightarrow \quad y\frac{x}{x} = \frac{a}{b}x \quad \Leftrightarrow \quad y \cdot 1 = \frac{a}{b}x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{a}{b}x$$

Använd detta för att eliminera y från (1.4):

$$ax + b\frac{a}{b}x = c \quad \Leftrightarrow \quad ax + ax = c \quad \Leftrightarrow \quad 2ax = c \quad \Leftrightarrow \quad x^* = \frac{c}{2a}$$

Sätt in detta i uttrycket för y:

$$y^* = \frac{a}{b}\frac{c}{2a} = \frac{ac}{b2a} = \frac{c}{2b}.$$

Detta exempel är likt vissa exempel som vi kommer att stöta på i avsnitten om optimalt konsumentbeteende.

[7] Vi kommer att använda modeller för utbud och efterfrågan som har ungefär denna form.

1.4 Övningar

1.4.1 Algebra

Förenkla följande uttryck.

(a) $-5 + (-3) - (-9)$

(b) $(-5)(3 - 7)$

(c) $(-2)(-15)\left(-\frac{1}{3}\right)$

(d) $(2x - 4y)5$

(e) $a\left(x + \frac{b}{a}y - c\right)$

(f) $-6y\frac{3}{18y}$

1.4.2 Räta linjens funktion

Illustrera den räta linjens funktion i följande fall.

(a) $y = 50 - 2x$

(b) $y = 36 - \frac{1}{3}x$

(c) $y = 4 + x$

(d) $y = -3 + 2x$

1.4.3 Ekvationslösning I

Lös ut x från följande ekvationer.

(a) $6x - 12 = 72$

(b) $5x = 18 + \frac{1}{2}x$

1.4.4 Ekvationslösning II

(a) Lös följande ekvationssystem för x och y.

$$y = 120 - x \tag{1.6}$$

$$y = 2x \tag{1.7}$$

(b) Lös följande ekvationssystem för x och y.

$$ax + by = c \tag{1.8}$$

$$\frac{2y}{3x} = \frac{a}{b} \tag{1.9}$$

Svar till Avsnitt 1.4

Övning 1.4.1

(a) $-5 + (-3) - (-9) = -5 - 3 + 9 = 1$

(b) $(-5)(3 - 7) = (-5)(3 + (-7)) = (-5)3 + (-5)(-7) = -15 + 35 = 20$

(c) $(-2)(-15)\left(-\frac{1}{3}\right) = 30\left(-\frac{1}{3}\right) = -30\frac{1}{3} = -\frac{30}{3} = -10$

(d) $(2x - 4y)5 = 2x5 - 4y5 = 2 \cdot 5x - 4 \cdot 5y = 10x - 20y$

(e) $a\left(x + \frac{b}{a}x - c\right) = ax + a\frac{b}{a}x - ac = ax + \frac{ab}{a}x - ac = ax + bx - ac = (a + b)x - ac$

(f) $-6y\frac{3}{18y} = -\frac{6y3}{18y} = -\frac{6 \cdot 3y}{18y} = -\frac{18y}{18y} = -1$

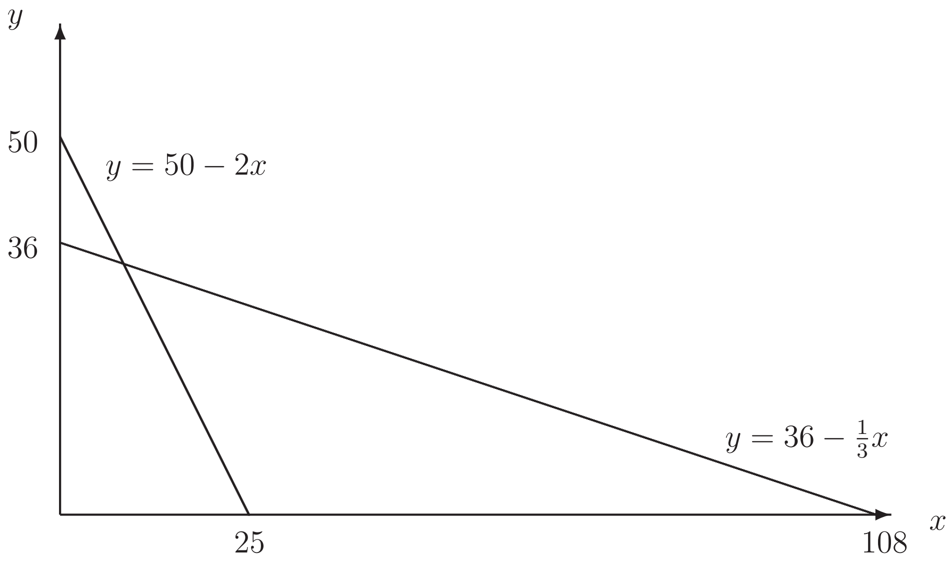
Övning 1.4.2

(a) Här har vi skärningspunkten mellan linjen och x-axeln vid $x = -50/(-2) = 25$. Linjen visas i Figur 1.3.

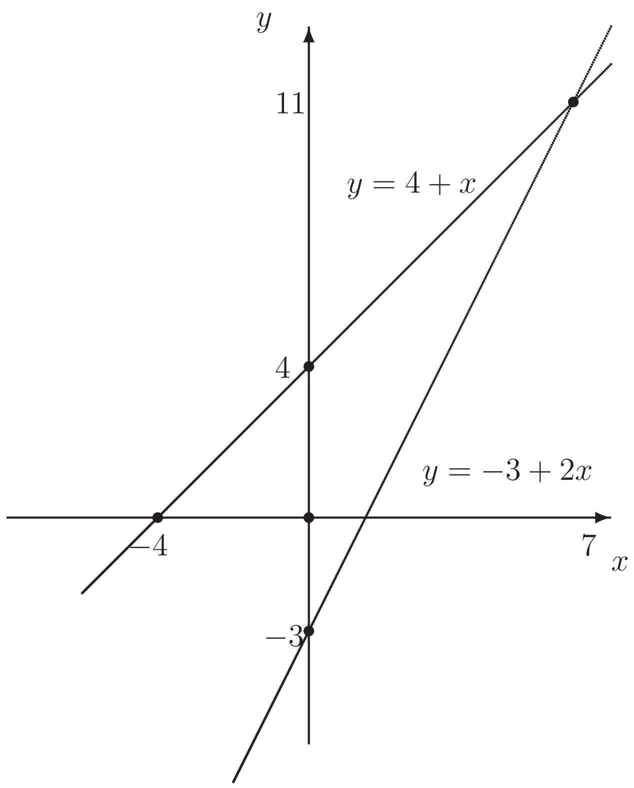
(b) Här sker skärningen vid $x = -36/(-(1/3)) = 36/(1/3) = 36 \cdot 3 = 108$. Linjen visas i Figur 1.3.

(c) Här har vi en punkt på linjen där $x = 0$ och $y = 4$. För att få en annan punkt kan vi t ex välja $x = 7$, vilket ger $y = 11$. Figur 1.4 illustrerar denna linje.

(d) Denna ekvation har en punkt där $x = 0$ och $y = -3$. Om vi sätter in $x = 7$ i denna funktion får vi $y = 11$. Figur 1.4 illustrerar denna linje.



Figur 1.3: Två räta linjer med negativ lutning



Figur 1.4: Två räta linjer med positiv lutning

Övning 1.4.3

(a) $6x - 12 = 72 \Leftrightarrow 6x - 12 + 12 = 72 + 12 \Leftrightarrow 6x = 84 \Leftrightarrow x = \frac{84}{6} = 14$

(b) $5x = 18 + \frac{1}{2}x \Leftrightarrow 2 \cdot 5x = 2 \cdot 18 + 2 \cdot \frac{1}{2}x \Leftrightarrow 10x = 36 + x \Leftrightarrow 9x = 36 \Leftrightarrow$ $x = \frac{36}{9} = 4$

Övning 1.4.4

(a) Sätt högerleden lika med varandra:

$$120 - x = 2x \quad \Leftrightarrow \quad 120 = 2x + x = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x^* = \frac{120}{3} = 40$$

Insättning av detta i den första ekvationen ger $y^* = 120 - 40 = 80$.

(b) Multiplicera båda sidor av (1.9) med x:

$$\frac{2y}{3x}x = \frac{a}{b}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2y}{3} = \frac{a}{b}x$$

Multiplicera båda sidor med $\frac{3}{2}$:

$$\frac{3}{2}\frac{2y}{3} = \frac{3}{2}\frac{a}{b}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}\frac{2}{3}y = \frac{3a}{2b}x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3a}{2b}x$$

Sätt in högerledet istället för y i (1.8):

$$ax+b\frac{3a}{2b}x = c \quad \Leftrightarrow \quad ax+\frac{3a}{2}x = c \quad \Leftrightarrow \quad 2ax+3ax = 2c \quad \Leftrightarrow \quad (2+3)ax = 2c$$

$$\Leftrightarrow \quad 5ax = 2c \quad \Leftrightarrow \quad x^* = \frac{2c}{5a}$$

Sätt in detta i uttrycket för y:

$$y^* = \frac{3a}{2b}\frac{2c}{5a} = \frac{3a2c}{2b5a} = \frac{3c}{5b}.$$