Repetition av
Grundläggande Matematik för Ekonomer

Clas Eriksson[1]

Akademin för ekonomi, samhälle och teknik
Mälardalens högskola

19 mars 2020

[1]E-mail: clas.eriksson@mdh.se.

Innehåll

1 Nödvändig Matematik **2**
1.1 Algebra 2
1.2 Räta Linjens Funktion 4
1.3 Lösning av Ekvationer och Ekvationssystem 6
1.3.1 Lösning av en Ekvation 7
1.3.2 Lösning av ett system med två ekvationer 9
1.4 Övningar 10
1.4.1 Algebra 10
1.4.2 Räta linjens funktion 10
1.4.3 Ekvationslösning I 11
1.4.4 Ekvationslösning II 11

2 Icke-linjära funktioner **12**
2.1 Den Kvadratiska Funktionen 12
2.2 En Hyperbel 14
2.3 Kvadratrots-Funktionen 16
2.4 Funktioner av två Variabler 18
2.5 Övningar 19
2.5.1 Kvadratiska funktioner 19
2.5.2 Vinstmaximering 19

3 Potensräkning **20**
3.1 Potenser 20
3.1.1 Rötter 20
3.1.2 Potensregler 21
3.2 Potensfunktioner 22
3.3 Potensfunktioner av Två Variabler 22
3.3.1 Två Exempel 22
3.3.2 Partiella Derivator 23

Kapitel 1

Nödvändig Matematik

I detta kapitel repeterar vi den matematik som ni **måste** behärska för att kunna studera nationalekonomi. Det är:

1. Algebra
2. Räta Linjens Funktion
3. Ekvationslösning

För att underlätta inlärningen finns några övningar med facit i slutet av kapitlet.

Utöver detta kommer vi att använda en del andra matematiska redskap under de olika kurserna. En del av detta presenteras i kapitel 2. Ni behöver inte behärska dem på samma sätt som det material som gås igenom här, men ni kommer att använda resultaten av t ex deriveringar. Det kan innebära lösning av ekvationer där derivator ingår, vilket för oss tillbaka till materialet i detta kapitel.

Slutligen finns en del matematik som är ännu mer avancerad i kapitel 3, som vi ibland måste använda. Allt som tas upp här har ni stött på i era tidigare utbildningar.

1.1 Algebra

Här går vi igenom ett antal regler för hur man kan skriva om matematiska uttryck så att slutresultatet är likvärdigt (ekvivalent) med det uttryck som man började med. Sådana omskrivningar gör man oftast för att förenkla de uttryck man har, så att de ska bli lättare att förstå eller lättare att arbeta vidare med.

Låt a, b och c vara konstanter. Då gäller följande **algebraiska regler** (med exempel till höger):

	Regel	Exempel
(1)	$a + b = b + a$	$2 + 5 = 5 + 2$
(2)	$(a + b) + c = b + (a + c)$	$(2 + 5) + 3 = 5 + (2 + 3)$
(3)	$a + 0 = a$	$2 + 0 = 2$
(4)	$a + (-a) = 0$	$2 + (-2) = 2 - 2 = 0$
(5)	$ab = ba$	$2 \cdot 5 = 5 \cdot 2 = 10$
(6)	$(ab)c = a(bc)$	$(2 \cdot 5) \cdot 3 = 2 \cdot (5 \cdot 3)$
(7)	$1 \cdot a = a$	$1 \cdot 2 = 2$
(8)	$aa^{-1} = a\frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1 \qquad (a \neq 0)$	$2 \cdot 2^{-1} = 2\frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$
(9)	$(-a)b = a(-b) = -ab$	$(-2)5 = 2(-5) = -2 \cdot 5 = -10$
(10)	$(-a)(-b) = ab$	$(-2)(-5) = 2 \cdot 5 = 10$
(11)	$a(b + c) = ab + ac$	$2(5 + 3) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16$
(12)	$(a + b)c = ac + bc$	$(2 + 5) \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 21$

Här följer några ytterligare exempel där dessa regler används.

1. $8 + x = x + 8$
2. $(3 + 5y) + 2y = 3 + (5y + 2y) = 3 + 7y$
3. $144 + 0 = 144$
4. $32 + (-32) = 32 - 32 = 0$
5. $x\frac{1}{4} = \frac{x}{4} = \frac{1}{4}x$
6. $\left(\frac{x}{y}\right) y = \left(x\frac{1}{y}\right) y = x\left(\frac{1}{y}y\right) = x\left(\frac{y}{y}\right) = x\,(1) = x \cdot 1 = x$
7. $(-4)6 = 4(-6) = -(4 \cdot 6) = -24$
8. $(-7)(-7) = 7 \cdot 7 = 49$
9. $5x(2y+4x) = 5x2y+5x4x = 5\cdot 2xy+5\cdot 4xx = 10xy+20xx = 10xy+20x^2$
10. $3(ay - x) = 3ay - 3x$
11. $-5(2y - 3x) = (-5)(2y + (-3x)) = (-5)2y + (-5)(-3x) =$
    $= -5 \cdot 2y + 5 \cdot 3x = -10y + 15x$

12. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \cdot \underbrace{\frac{\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}}}_{=1} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

13. Vi har
$$\frac{ax}{by} = \frac{c}{d}.$$
Lös ut x, genom att multiplicera båda sidor med $\frac{by}{a}$:
$$\frac{ax}{by}\frac{by}{a} = \frac{c}{d}\frac{by}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x\frac{aby}{aby} = \frac{c}{d}\frac{b}{a}y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{cb}{da}y,$$
där symbolen $\Leftrightarrow$ utläses 'är ekvivalent med'.

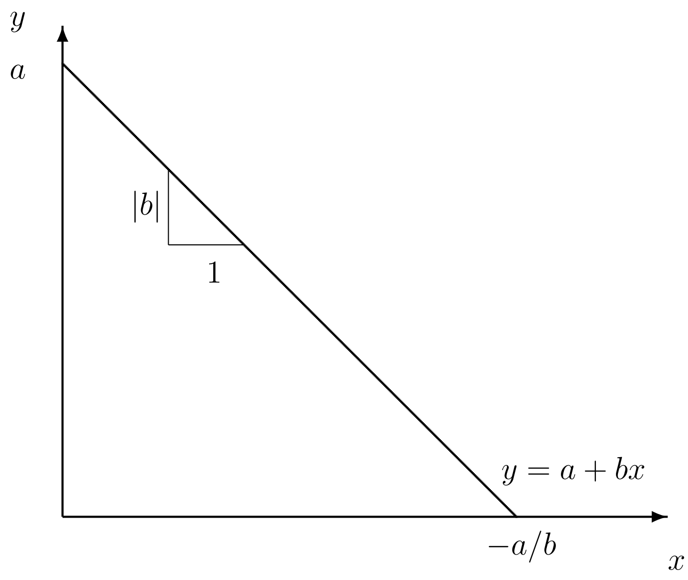
Den sista punkten var ett exempel på ekvationslösning, vilket vi kommer tillbaka till senare.

1.2 Räta Linjens Funktion

Som nationalekonomer använder vi matematiska funktioner för att beskriva samband mellan olika ekonomiska variabler. Vi kan till exempel använda en funktion för att beskriva hur ett företags produktionskostnader förändras när den producerade kvantiteten ökar. Ett annat exempel är en funktion som visar hur den efterfrågade kvantiteten på en vara beror på varans pris.

En mycket vanlig funktion är den räta linjens funktion. Den kan skrivas på följande sätt:
$$y = a + bx, \tag{1.1}$$
där a och b är konstanter, som kan vara positiva eller negativa. Här är alltså y en funktion av x: för varje x-värde som man sätter in i (1.1) 'producerar' funktionen ett unikt y-värde. För att bättre förstå sambandet mellan x och y kan vi illustrera denna funktion i en figur med y på den vertikala axeln och x på den horisontella. Vi gör detta genom att markera ut lutningen och intercepten, dvs skärningarna mellan linjen och axlarna.

Vi börjar med det vertikala interceptet, dvs den punkt där linjen skär y-axeln. Det sker när $x = 0$, så vi sätter in $x = 0$ i (1.1) och får
$$x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = a.$$
Linjens skärning med x-axeln innebär å andra sidan att $y = 0$, vilket betyder att (1.1) kan skrivas som $0 = a + bx$ i den punkten. För att se i vilken punkt



Figur 1.1: Rät linje med negativ lutning

detta sker, skriver vi om denna ekvation som $-a = bx$ eller $x = -a/b$. Vi summerar detta som att

$$y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -a/b.$$

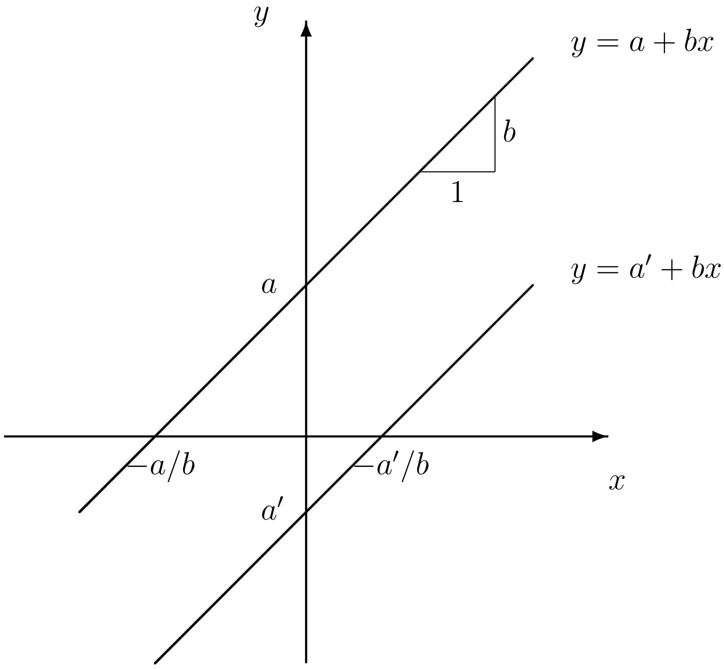
Figur 1.1 illustrerar dessa två skärningspunkter i fallet då linjen har en negativ lutning[1]. I Figur 1.2 har linjen istället en positiv lutning. I båda figurerna är $a > 0$, medan $a' < 0$ i Figur 1.2.[2]

För att få fram lutningen på linjen ställer vi följande fråga: Hur mycket förändras y när x ökar med en enhet, säg från x_0 till $x_1 = x_0 + 1$? För att svara på frågan sätter vi in de två x-värdena i (1.1) och får $y_0 = a + bx_0$ respektive $y_1 = a + bx_1 = a + b(x_0 + 1)$. Förändringen i y är därför

$$y_1 - y_0 = a + bx_1 - a - bx_0 = b\,(x_1 - x_0) = b\,(x_0 + 1 - x_0) = b.$$

[1]Detta innebär att $b < 0$, som vi strax ska se.

[2]Eftersom det är frågan om räta linjer räcker det med att hitta två punkter för att kunna rita en linje. Linjen visar (många) kombinationer av x och y som gör att ekvationen är uppfylld.



Figur 1.2: Räta linjer med positiv lutning

För varje enhet som x ökar förändras alltså y med b enheter. Vi kallar b lutningskoefficienten; den illustreras också i Figur 1.1 (där den är negativ) och Figur 1.2 (positiv).[3]

För en alternativ förklaring till lutningen kan vi definiera förändringarna $\Delta y = y_1 - y_0$ och $\Delta x = x_1 - x_0$, där $x_1 - x_0$ kan vara något annat än 1. Istället för $y_1 - y_0 = b\,(x_1 - x_0)$ kan vi då skriva

$$\Delta y = b\Delta x.$$

Division av båda sidor med Δx ger

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = b.$$

Tolkningen av detta uttryck är att för varje enhet som x ökar så förändras y med b enheter.

1.3 Lösning av Ekvationer och Ekvationssystem

Som nationalekonomer analyserar vi ofta ekonomiska problem genom användning av en eller flera ekvationer. Om ekvationerna är linjära går det att lösa

[3] I Figur 1.1 har vi $|b|$, dvs absolutvärdet av b, eftersom sträckans längd inte kan vara negativ.

ut de okända (endogena) variablerna ur dessa ekvationer. Det mest kända exemplet är förmodligen två-ekvations-modellen för utbud och efterfrågan. Från den modellen kan vi lösa ut jämviktspriset och jämviktskvantiteten. Men innan vi kommer till det börjar vi med att lösa ut den okända variabeln ur *en* ekvation.

1.3.1 Lösning av en Ekvation

En allmän regel för ekvationslösning är att **det man gör på den ena sidan av likhetstecknet måste man också göra på den andra sidan**. Det innebär att följande operationer är tillåtna:

1. att addera samma term till båda sidor av likhetstecknet
2. att subtrahera samma term från båda sidor av likhetstecknet
3. att multiplicera båda sidor med samma faktor
4. att dividera båda sidor med samma faktor

Dessa regler är tydliga och i princip enkla, men det finns alltid en risk för misstag, särskilt om man har bråttom. I de två sista fallen måste man vara extra noggrann och se till att man verkligen tar med allting på båda sidorna när man multiplicerar eller dividerar med någon faktor.

Exempel 1 Som ett första exempel kan vi utgå från följande ekvation.

$$5 + 3x = 17 - x.$$

Här vill vi lösa ut den okända variablen x, för att se vilket värde på x som gör att ekvationen är uppfylld. Varje sida har en rent numerisk term och en x-term. Vi börjar med att samla x-termer på en sida och de numeriska på den andra. För att eliminera x från den högra sidan adderar vi x till båda sidor:

$$5 + 3x + x = 17 - x + x.$$

Förenkling ger[4]

$$5 + 4x = 17.$$

Nästa steg är att eliminera 5 från den vänstra sidan, genom att subtrahera 5 från båda sidor:

$$5 + 4x - 5 = 17 - 5.$$

[4]När vi blir lite säkrare säger vi att vi flyttar över x:et från höger sida och byter tecken: $5 + 3x + x = 17$.

Efter förenkling får vi[5]

$$4x = 12.$$

Det sista steget är att göra x ensamt på vänster sida. Detta uppnås genom att man dividerar båda sidor med 4:

$$\frac{4x}{4} = \frac{12}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{4}x = 3,$$

vilket reduceras till

$$x^* = 3.$$

där '$*$' indikerar lösningen till ekvationen.

Exempel 2 Ett annat exempel utgår från ekvationen

$$\frac{100 - 3x}{4} = \frac{40 - 2x}{3}.$$

För att få bort *nämnarna* (uttrycken under divisionslinjerna), multiplicerar vi båda sidor med 3 och med 4. Dessutom sätter vi parenteser runt *täljarna* (uttrycken över divisionslinjerna):

$$\frac{(100 - 3x)}{4} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{(40 - 2x)}{3} \cdot 3 \cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(100 - 3x) \cdot 3 \cdot 4}{4} = \frac{(40 - 2x) \cdot 3 \cdot 4}{3}.$$

Förenkla genom att 'kvitta' bort nämnarna:

$$\frac{(100 - 3x) \cdot 3}{1} = \frac{(40 - 2x) \cdot 4}{1}.$$

Förenkla ytterligare:

$$(100 - 3x) \cdot 3 = (40 - 2x) \cdot 4.$$

Parentesen på den vänstra sidan måste vara med, så att båda termerna inom parentesen multipliceras med 3. På samma sätt blir allt inom parentes multiplicerat med 4 på den högra sidan. Nu tar vi bort parenteserna och utför multiplikationerna term för term:

$$100 \cdot 3 - 3x \cdot 3 = 40 \cdot 4 - 2x \cdot 4.$$

Förenkla:

$$300 - 9x = 160 - 8x.$$

[5]När vi blir lite säkrare säger vi att vi flyttar över 5 från vänster sida och byter tecken: $4x = 17 - 5$.

För att samla termer av samma sort, subtraherar vi 160 och adderar $9x$ på båda sidor:

$$300 - 9x - 160 + 9x = 160 - 8x - 160 + 9x.$$

Förenkling ger

$$300 - 160 = -8x + 9x$$

eller

$$x^* = 140.$$

1.3.2 Lösning av ett system med två ekvationer

Ekonomiska modeller innehåller ofta flera obekanta variabler. Då behöver vi också flera ekvationer för att hitta de obekanta värdena.

Exempel 1 Utgå från följande system av två ekvationer[6]:

$$y = 100 - 3x \tag{1.2}$$

$$y = 2x \tag{1.3}$$

Vi söker värden på x och y som gör att systemet är uppfyllt (x^* och y^*). Lösningen av problemet underlättas av att vi direkt kan använda (1.3) i (1.2) för att eliminera y:

$$2x = 100 - 3x$$

Flytta över $3x$:

$$5x = 100$$

Dividera med 5:

$$x^* = 20$$

Användning av detta i (1.3) ger

$$y^* = 2 \cdot 20 = 40.$$

Exempel 2 Nu har vi ekvationssystemet

$$ax + by = c \tag{1.4}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{b} \tag{1.5}$$

[6] Vi kommer att använda modeller för utbud och efterfrågan som har ungefär denna form.

För att hitta de värden på x och y som löser detta system kan vi börja med att lösa ut y från (1.5). Multiplicera båda sidor med x:[7]

$$\frac{y}{x}x = \frac{a}{b}x \quad \Leftrightarrow \quad y\frac{x}{x} = \frac{a}{b}x \quad \Leftrightarrow \quad y \cdot 1 = \frac{a}{b}x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{a}{b}x$$

Använd detta för att eliminera y från (1.4):

$$ax + b\frac{a}{b}x = c \quad \Leftrightarrow \quad ax + ax = c \quad \Leftrightarrow \quad 2ax = c \quad \Leftrightarrow \quad x^* = \frac{c}{2a}$$

Sätt in detta i uttrycket för y:

$$y^* = \frac{a}{b}\frac{c}{2a} = \frac{ac}{b2a} = \frac{c}{2b}.$$

När vi studerar optimalt konsumentbeteende kan vissa efterfrågefunktioner se ut ungefär på detta sätt.

1.4 Övningar

1.4.1 Algebra

Förenkla följande uttryck.

(a) $-5 + (-3) - (-9)$

(b) $(-5)(3 - 7)$

(c) $(-2)(-15)\left(-\frac{1}{3}\right)$

(d) $(2x - 4y)5$

(e) $a\left(x + \frac{b}{a}y - c\right)$

(f) $-6y\frac{3}{18y}$

1.4.2 Räta linjens funktion

Illustrera den räta linjens funktion i följande fall.

(a) $y = 50 - 2x$

(b) $y = 36 - \frac{1}{3}x$

(c) $y = 4 + x$

(d) $y = -3 + 2x$

[7] När vi blir säkrare säger vi bara att vi flyttar över x: $\frac{y}{1} = \frac{ax}{b}$. Eftersom x stod 'nere' på vänster sida hamnar det 'uppe' på höger sida.

1.4.3 Ekvationslösning I

Lös ut x från följande ekvationer.

(a) $6x - 12 = 72$

(b) $5x = 18 + \frac{1}{2}x$

1.4.4 Ekvationslösning II

(a) Lös följande ekvationssystem för x och y.

$$y = 120 - x \tag{1.6}$$
$$y = 2x \tag{1.7}$$

(b) Lös följande ekvationssystem för x och y.

$$ax + by = c \tag{1.8}$$

$$\frac{2y}{3x} = \frac{a}{b} \tag{1.9}$$

Kapitel 2

Icke-linjära funktioner

Den matematik som presenteras här behöver ni inte behärska lika väl som den som presenterades i kapitel 1. Men många ekonomiska exempel blir faktiskt enklare om vi kan använda redskap från detta kapitel.

Många ekonomiska samband som är icke-linjära. Därför kompletterar vi här den linjära funktionen (1.1) i avsnitt 1.2 med tre icke-linjära matematiska funktioner. Kapitlet avslutas med en sektion om funktioner av flera variabler.

2.1 Den Kvadratiska Funktionen

En mycket användbar icke-linjär funktion är den kvadratiska funktionen

$$y = x^2. \tag{2.1}$$

Den kan också skrivas som $f(x) = x^2$. Det är vanligt att man använder denna typ av funktion för att beskriva hur produktionskostnaderna ökar med den producerade kvantiteten eller hur miljöskadorna stiger när föroreningarna blir mer omfattande.

I Tabell 2.1 finns några värden på x, tillsammans med de motsvarande värdena på x^2. Dessa värden har plottats i Figur 2.1. Notera den karakteristiska formen på kurvan: den är ganska flack i början men blir sedan brantare när x växer.

När vi använder denna typ av funktion är vi ofta intresserade av effekterna på y av en liten förändring i x. Det kan t ex röra sig om hur mycket kostnaden ökar när produktionen ökar marginellt (med en enhet). Vi kommer att kalla detta för marginalkostnaden. Den matematiska motsvarigheten

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5	6	7	8	9	10
x^2	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	12.25	16	25	36	49	64	81	100
$2x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14	16	18	20

Tabell 2.1: En kvadratisk funktion

till marginalkostnaden är lutningen på kostnadskurvan. För en mer precis information använder vi derivatan för att beskriva lutningen. Derivatan för (2.1) är

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x. \tag{2.2}$$

Detta innebär att y förändras med ungefär $2x$ (per enhets förändring i x), när det sker en liten ökning i x. För att betona att detta gäller för *små* förändringar i x använder vi 'd' istället för 'Δ', som vi annars brukar använda för förändringar.[1]

Den tredje raden i Tabell 2.1 visar några värden på derivatan. Notera att derivatan själv är en linjär funktion (som också visas i Figur 2.1). Detta kommer att förenkla många beräkningar för oss. I koordinaten (5,25) är lutningen på $y = x^2$ lika med 10, vilket också är höjden på linjen för derivatan ($y = 2x$) i den punkten.

Funktionen i (2.1) är ett enkelt specialfall. Vi har ibland nytta av den något mer generella funktionen

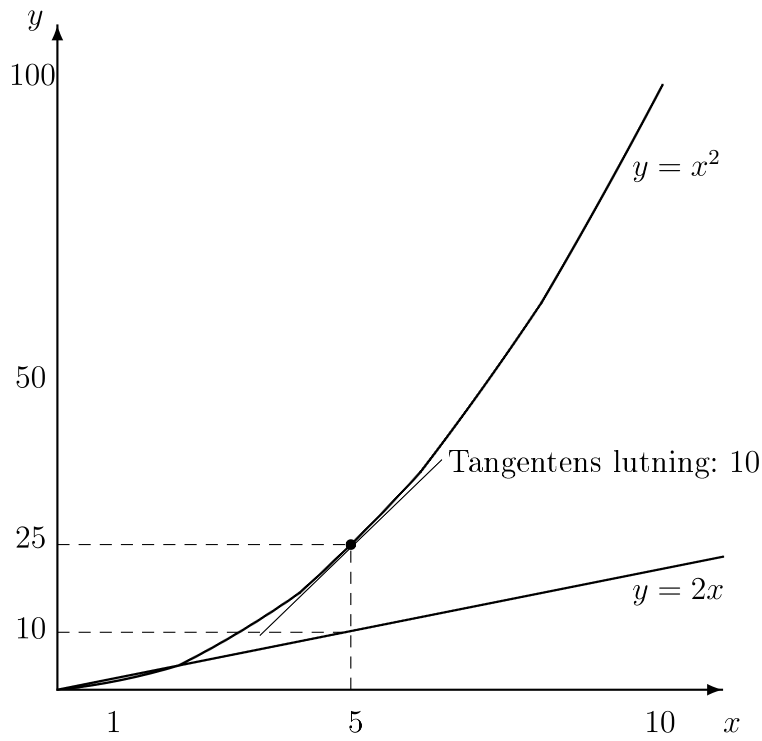
$$y = a + bx^2, \tag{2.3}$$

där vi har infört konstanterna a och b. Vi deriverar nu term för term och resultatet blir

$$\frac{dy}{dx} = 0 + b2x = 2bx. \tag{2.4}$$

Derivatan av konstanten a är alltså lika med noll, eftersom den inte förändras när x förändras. Konstanten b står kvar framför derivatan av x^2 i samma term. Man brukar skriva den numeriska koefficienten först. Ni kan nu lösa Övning 2.5.1.

[1]Ett alternativt sätt att skriva derivatan är $f'(x) = 2x$, när $y = f(x) = x^2$.



Figur 2.1: En kvadratisk funktion

x	0,1	1	2	4	6	8	10	12	120
$y = 12/x$	120	12	6	3	2	1,5	1,2	1	0,1
$\frac{dy}{dx} = -\frac{12}{x^2} = -\frac{y}{x}$	-1200	-12	-3	-0,75	-1/3	-0,1875	-0,12	-0,083	-0,00083

Tabell 2.2: En hyperbel

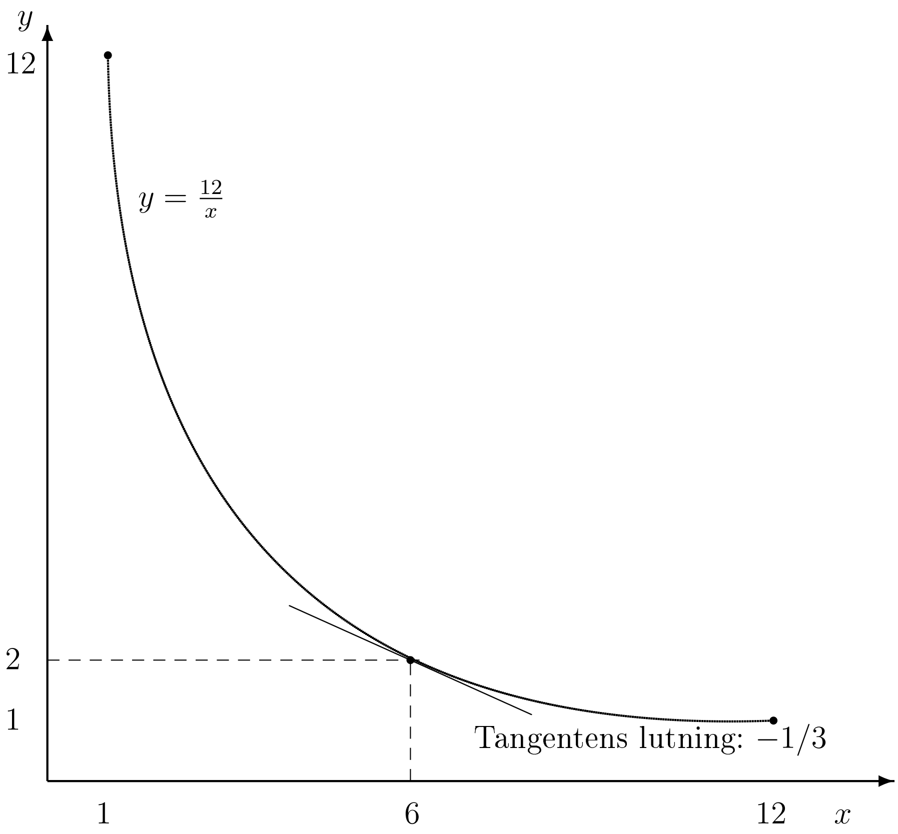
2.2 En Hyperbel

Nu introducerar vi en icke-linjär funktion med en negativ lutning, nämligen **hyperbeln**. Det matematiska uttrycket är

$$y = \frac{a}{x}, \tag{2.5}$$

där a är en konstant (som oftast är positiv). Värdet på denna funktion, y, faller när x ökar, eftersom x står nere i nämnaren på höger sida. Tabell 2.2 ger olika värden för funktionen i (2.5) i fallet då $a = 12$.

Dessa värden bildar en kurva i Figur 2.2. Observera det typiska utseendet på denna typ av kurva/funktion. Vid mycket låga värden på x är y väldigt



Figur 2.2: En hyperbel

högt, medan y går (långsamt och aldrig fullständigt) mot noll när x går mot höga värden.

Lutningen på kurvan ges av derivatan[2]

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{x^2} = -\frac{a}{x} \cdot \frac{1}{x}.$$

Genom att använda (2.5) kan vi skriva detta som

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x}.$$

Några värden på denna derivata ges också i Tabell 2.2. Derivatorna bekräftar att kurvan är mycket brant vid låga värden på x (stora negativa värden på $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$), för att sedan bli flackare ju högre x blir (små negativa värden på $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$). Vid koordinaten (6,2) är lutningen på kurvan $-1/3$.

[2]Enligt en regel i avsnitt 1.1 kan ekvation (2.5) skrivas som $y = ax^{-1}$. Enligt en regel som vi kommer till i avsnitt 3.2 är derivatan $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a(-1)x^{-2} = -ax^{-2} = -\frac{a}{x^2}$.

x	0,25	0,64	1	4	9	16	25	36	100
$y = 4\sqrt{x}$	2	3,2	4	8	12	16	20	24	40
$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{2\sqrt{x}}$	4	2,5	2	1	0,67	0,5	0,4	0,33	0,2

Tabell 2.3: En Kvadratrotsfunktion

2.3 Kvadratrots-Funktionen

Vi såg att den kvadratiska funktionen i (2.1) har en lutning som stiger när x ökar. Nu går vi till ett exempel där lutningen istället minskar när x ökar. I funktionen

$$y = a\sqrt{x} \tag{2.6}$$

kallas uttrycket $\sqrt{x}$ för kvadratroten ur x (medan a är en konstant). Kvadratroten ur x definieras som det tal som ger x när det multipliceras med sig självt. Alltså:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x.$$

Till exempel har vi $\sqrt{16} = 4$ eftersom $4 \cdot 4 = 16$.[3]

I Tabell 2.3 finns ett antal funktionsvärden för (2.6) vid olika värden på x, under antagandet att $a = 4$. Dessa värden ger en kurva som illustreras i Figur 2.3. Observera att kurvan är mycket brant till en början, och att den senare blir allt flackare.

Lutningen på kurvan ges av derivatan till (2.6):[4]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

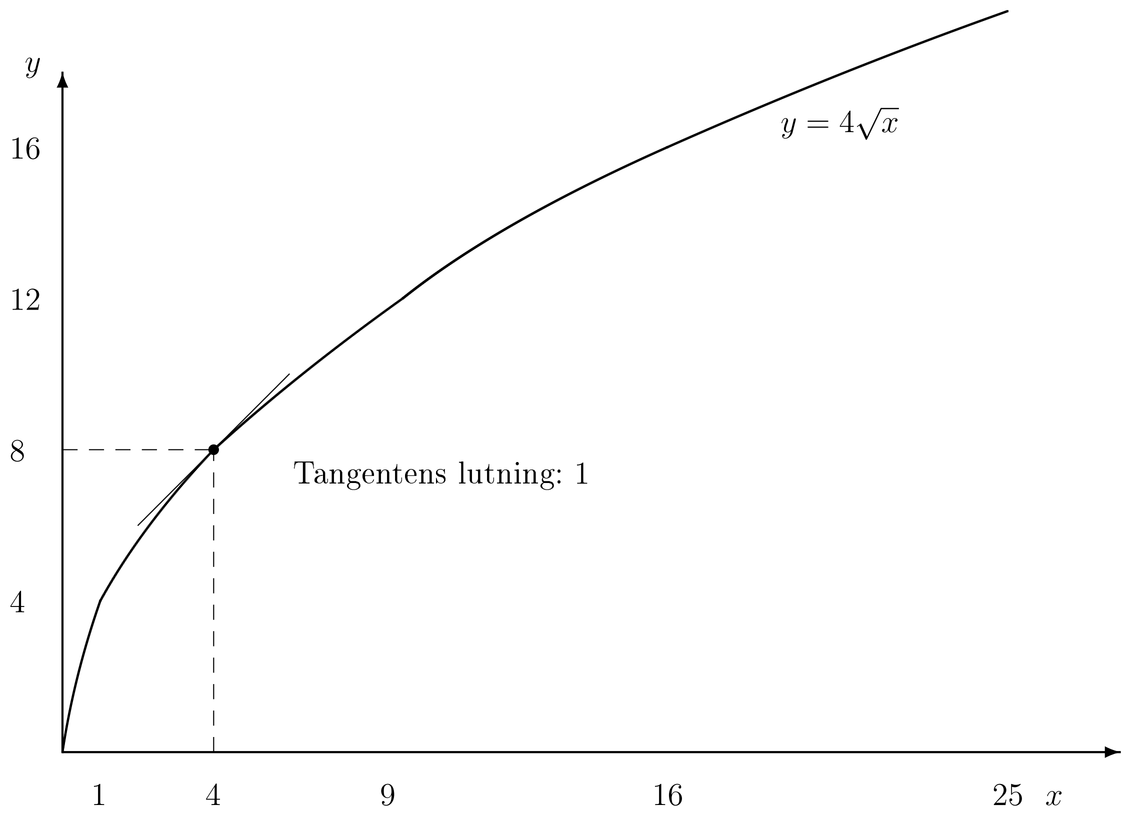
Tabell 2.3 återger några värden på denna derivata när $a = 4$. Derivatorna bekräftar att lutningen är brant när x litet och att den faller när x ökar. I koordinaten (4,8) är lutningen på kurvan lika med 1.

[3]Man kan också använda beteckningen $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Enligt en regel som vi kommer till i avsnitt 3.1 får vi då

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x.$$

[4]Enligt regler från avsnitt 1.1 och 3.2 har vi $y = f(x) = a\sqrt{x} = ax^{\frac{1}{2}}$ och

$$f'(x) = a\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{a}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{2\sqrt{x}}.$$



Figur 2.3: En Kvadratrotsfunktion

2.4 Funktioner av två Variabler

En ekonomisk variabel påverkas ofta av flera andra variabler. Den producerade kvantiteten av en vara beror t ex både på antalet maskiner och antalet arbetare som används i produktionen. Därför använder vi funktioner av flera variabler. Antag t ex att y är en funktion av de två variablerna x_1 och x_2. Generellt kan en funktion av två variabler skrivas som

$$y = f(x_1, x_2).$$

Vi kan lägga till några antaganden om denna funktion, t ex att y ökar när x_1 eller x_2 (eller båda) ökar. Som antyddes tidigare kan funktionen vara en produktionsfunktion, där y är den producerade kvantiteten, medan x_1 och x_2 är kvantiteter av produktionsfaktorerna kapital respektive arbete. Antagandet att funktionens värde ökar när argumenten (x_1 och x_2) växer betyder då helt enkelt att den producerade kvantiteten blir större när mängden insatt kapital och (eller) arbete ökar.

För att få ett mer specifikt exempel kan vi utgå från en funktion där vi helt enkelt har produkten av x_1 och x_2 i högerledet:

$$y = x_1 \cdot x_2. \tag{2.7}$$

Detta är helt klart en funktion som är stigande i båda argumenten: ett högre x_1 eller x_2 gör y större. Ett exempel kan återigen vara en produktionsfunktion, men det kan också vara en nyttofunktion, där x_1 och x_2 är kvantiteterna av de varor som konsumeras. En högre konsumtion av någon av dem gör nyttan, y, högre.

En del av egenskaperna hos en funktion av flera (två) variabler kan beskrivas med hjälp av så kallade **nivåkurvor**. Sådana kurvor beskriver kombinationer av x_1 och x_2 som ger samma värde till funktionen. Till exempel, innebär punkten[5] $(x_1, x_2) = (2, 2)$ att $y = 2 \cdot 2 = 4$ i funktionen (2.7). Två andra punkter som ger samma y–värde är $(4, 1)$ och $(1, 4)$. Dessa punkter, tillsammans med andra liknande punkter bildar en kurva i planet med x_1 och x_2 på axlarna.[6]

Ett annat exempel på en funktion av två variabler är

$$y = a\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} = a x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}},$$

där a är en konstant. Även här ökar y om x_1 eller x_2 ökar. Vi återkommer till detta i nästa kapitel.

[5] Den första siffran är värdet på x_1 och den andra är värdet på x_2.

[6] Indifferenskurvor är exempel på nivåkurvor.

2.5 Övningar

2.5.1 Kvadratiska funktioner

Beräkna derivatorna av följande funktioner.

(a) $y = 12,5 \cdot x^2$

(b) $y = 17 - 3\frac{1}{2}x^2$

(c) $y = (a - bx)x - cx^2$

2.5.2 Vinstmaximering

I gymnasiet lärde vi oss att man kan hitta en funktions maximipunkt genom att sätta derivatan lika med noll.[7] Här följer tre funktioner som beskriver hur vinsten (π) beror på den producerade kvantiteten (x):

(a) $\pi_1(x) = 60x - 100 - 3x^2$

(b) $\pi_2(x) = 100x - 2x^2 - 20x$

(c) $\pi_3(x) = 60x - x^2 - 20 - 2x^2$

Ta fram de värden på x som maximerar dessa vinstfunktioner.

[7] Det krävs också att funktionen är 'väldefinierad' vilket de är i denna övning.

Kapitel 3

Potensräkning

I det föregående kapitlet såg vi exempel på funktioner där variablerna kunde vara upphöjda till 2, -1 eller $1/2$. Innehållet i detta kapitel är ännu lite mer avancerat genom att vi nu låter exponenten vara vilket tal som helst. Vi kommer att använda materialet i detta kapitel på ett försiktigt sätt.

3.1 Potenser

3.1.1 Rötter

Kvadratroten ur a kan skrivas som $\sqrt{a}$ eller $a^{\frac{1}{2}}$, där a kallas **bas** och $\frac{1}{2}$ kallas **potens** eller **exponent**. När dessa uttryck multipliceras med sig själva blir resultatet konstanten a:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a \qquad \text{eller} \qquad a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a.$$

Några exempel är:

$$5 \cdot 5 = 25 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{25} = 5 \quad \text{och} \quad 12 \cdot 12 = 144 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{144} = 12.$$

Kvadratroten ur a kan kallas för den 'andra' roten ur x. Vi generaliserar nu detta till rötter av högre ordning. Den n:te roten ur a skrivs som $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ och den definieras som:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a.$$

Alltså är $a^{\frac{1}{n}}$ det tal som ger a om det multipliceras med sig självt n gånger. Till exempel:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2 \quad \text{och} \quad 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[4]{625} = 625^{\frac{1}{4}} = 5.$$

I ord: den tredje roten ur 8 är 2 och den fjärde roten ur 625 är 5.

3.1.2 Potensregler

Här följer några regler för omskrivning av potensuttryck, inklusive några exempel.[1]

	Regel	**Exempel**
(1)	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
(2)	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2} = 2^1 = 2 \quad \left(= \frac{2\cdot2\cdot2}{2\cdot2}\right)$
(3)	$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$	$(2^3)^2 = 2^{3\cdot2} = 2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
(4)	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$
(5)	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = \frac{4^2}{2^2} = \frac{4\cdot4}{2\cdot2} = \frac{4\cdot4}{4} = 4$
(6)	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2\cdot2\cdot2} = \frac{1}{8}$

Vi har också att

$$a^0 = 1, \quad 0^n = 0 \quad \text{och att} \quad 0^0 \quad \text{inte är definierat.}$$

Här följer några ytterligare tillämpningar av dessa regler.

1.
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

2.
$$\frac{a^{1/3}\sqrt{a}\cdot a}{(\sqrt{a})^3 a^{1/6}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{1}}}{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 a^{\frac{1}{6}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{1}}}{a^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{6}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}}}{a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\right)} = a^{\frac{1}{6}},$$

eftersom $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{6}{6} - \frac{9}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

3. (Lös ut L)
$$45\frac{2}{3}L^{-1/3} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{45}{10}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{L^{-1/3}} = L^{1/3} \quad \Leftrightarrow \quad L^{1/3} = \frac{90}{30} = 3$$
$$\left(L^{1/3}\right)^3 = 3^3$$
$$L = 27$$

4. (Lös ut x)
$$\frac{2x^{-1/5}y^{1/5}}{8x^{4/5}y^{-4/5}} = \frac{7}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^{1/5}y^{4/5}}{x^{4/5}x^{1/5}} = \frac{7\cdot8}{4\cdot2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{7} = x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y}{7}$$

[1] Exponenterna behöver inte vara heltal.

3.2 Potensfunktioner

En potensfunktion kan uttryckas som

$$y = ax^b, \tag{3.1}$$

där a och b är konstanter. Vi har tittat på specialfall av denna funktion i avsnitten 2.1—2.3, där exponenten var $b = 2$, $b = -1$ respektive $b = 1/2$.

Derivatan av potensfunktionen är[2]

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = abx^{b-1} \qquad \text{(Potensregeln)}$$

Derivatan säger hur mycket y förändras, per enhets förändring i x, vid små förändringar. Antag att y är produktionskostnaden, som är en funktion av den producerade kvantiteten, x. Då är derivatan marginalkostnaden, dvs ökningen av kostnaden när produktionen stiger med en enhet.

Som ett annat exempel kan vi låta produktionen (Y) vara en funktion av mängden arbetskraft (L):

$$Y = AL^a,$$

där A och a är positiva konstanter. Derivatan av denna produktionsfunktion är

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}L} = AaL^{a-1}.$$

Detta är marginalprodukten av arbete: den ökning av Y som följer av en ökning av L med en enhet.

3.3 Potensfunktioner av Två Variabler

3.3.1 Två Exempel

Ett mycket vanligt exempel på en funktion av två variabler är en produktionsfunktion där produktionen (Y) är en funktion av kapital (K) och arbete (L):

$$Y = AK^aL^b, \tag{3.2}$$

där A, a och b är positiva konstanter. Detta kallas för en Cobb-Douglas-funktion. Ju mer kapital och arbete som företaget använder, desto mer kommer att produceras.

[2] Alternativt kan man skriva $f(x) = ax^b$. Derivatan är då $f'(x) = abx^{b-1}$.

För att ge ett annat exempel antar vi att vinsten i ett företag (π) är en funktion av kvantiteterna av de två varor (Q_1 och Q_2) som företaget producerar och säljer. Funktionen kan till exempel vara

$$\pi(Q_1, Q_2) = P_1Q_1 + P_2Q_2 - aQ_1^2 - bQ_1Q_2 - cQ_2^2. \tag{3.3}$$

De första två termerna är intäkter: priser (P) multiplicerade med kvantiteter. De återstående tre termerna utgör kostnaderna.

3.3.2 Partiella Derivator

Den partiella derivatan av $\pi(Q_1, Q_2)$ med avseende på Q_1 är

$$\frac{\partial\pi(Q_1, Q_2)}{\partial Q_1}.$$

Detta innebär att $\pi(Q_1, Q_2)$ deriveras med avseende på Q_1, medan Q_2 är konstant. Denna derivata säger hur mycket π (ungefärligen) förändras när Q_1 ökas med en enhet och Q_2 är konstant. (Notera att vi använder symbolen ∂ istället för d för att indikera att derivatan är partiell.)

Genom att använda uttrycket för $\pi(Q_1, Q_2)$ i (3.3) får vi de två partiella derivatorna

$$\frac{\partial\pi(Q_1, Q_2)}{\partial Q_1} = P_1 - a2Q_1 - bQ_2$$

och

$$\frac{\partial\pi(Q_1, Q_2)}{\partial Q_2} = P_2 - c2Q_2 - bQ_1.$$

I den första derivatan behandlas Q_2 som en konstant när vi deriverar med avseende på Q_1.

Cobb-Douglas-funktionen i (3.2) ger de partiella derivatorna

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = AaK^{a-1}L^b = aAK^aK^{-1}L^b = a \cdot AK^aL^b \cdot K^{-1} = a \cdot Y \cdot K^{-1} = a\frac{Y}{K}.$$

och

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = AK^abL^{b-1} = b \cdot AK^aL^b \cdot L^{-1} = b \cdot Y \cdot L^{-1} = b\frac{Y}{L}.$$

I det andra uttrycket betraktas K som en konstant när vi deriverar med avseende på L.

Svar till övningarna

Svar till Avsnitt 1.4

Övning 1.4.1

(a) $-5 + (-3) - (-9) = -5 - 3 + 9 = 1$

(b) $(-5)(3 - 7) = (-5)(3 + (-7)) = (-5)3 + (-5)(-7) = -15 + 35 = 20$

(c) $(-2)(-15)\left(-\frac{1}{3}\right) = 30\left(-\frac{1}{3}\right) = -30\frac{1}{3} = -\frac{30}{3} = -10$

(d) $(2x - 4y)5 = 2x5 - 4y5 = 2 \cdot 5x - 4 \cdot 5y = 10x - 20y$

(e) $a\left(x + \frac{b}{a}x - c\right) = ax + a\frac{b}{a}x - ac = ax + \frac{ab}{a}x - ac = ax + bx - ac = (a + b)x - ac$

(f) $-6y\frac{3}{18y} = -\frac{6y3}{18y} = -\frac{6 \cdot 3y}{18y} = -\frac{18y}{18y} = -1$

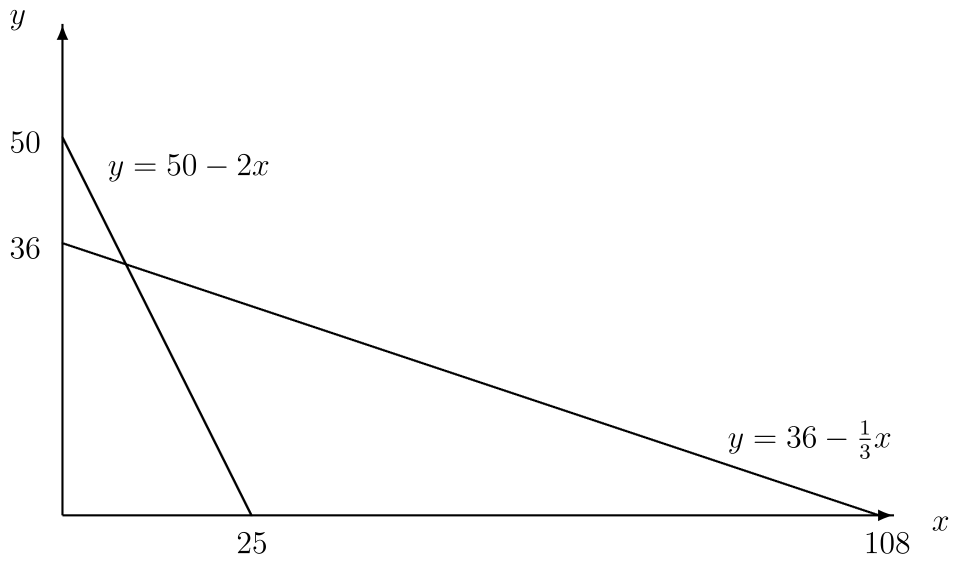
Övning 1.4.2

(a) Här har vi skärningspunkten mellan linjen och x-axeln vid $x = -50/(-2) = 25$. Linjen visas i Figur 3.1.

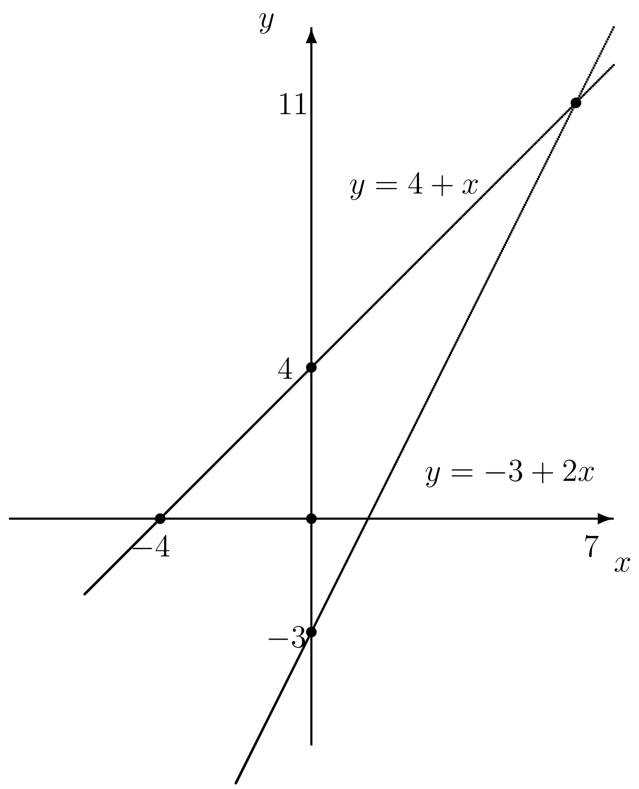
(b) Här sker skärningen vid $x = -36/(-(1/3)) = 36/(1/3) = 36 \cdot 3 = 108$. Linjen visas i Figur 3.1.

(c) Här har vi en punkt på linjen där $x = 0$ och $y = 4$. För att få en annan punkt kan vi t ex välja $x = 7$, vilket ger $y = 11$. Figur 3.2 illustrerar denna linje.

(d) Denna ekvation har en punkt där $x = 0$ och $y = -3$. Om vi sätter in $x = 7$ i denna funktion får vi $y = 11$. Figur 3.2 illustrerar denna linje.



Figur 3.1: Två räta linjer med negativ lutning



Figur 3.2: Två räta linjer med positiv lutning

Övning 1.4.3

(a) $6x - 12 = 72 \Leftrightarrow 6x - 12 + 12 = 72 + 12 \Leftrightarrow 6x = 84 \Leftrightarrow x = \frac{84}{6} = 14$

(b) $5x = 18 + \frac{1}{2}x \Leftrightarrow 2 \cdot 5x = 2 \cdot 18 + 2 \cdot \frac{1}{2}x \Leftrightarrow 10x = 36 + x \Leftrightarrow 9x = 36 \Leftrightarrow$
$x = \frac{36}{9} = 4$

Övning 1.4.4

(a) Sätt högerleden lika med varandra:

$$120 - x = 2x \quad \Leftrightarrow \quad 120 = 2x + x = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x^* = \frac{120}{3} = 40$$

Insättning av detta i den första ekvationen ger $y^* = 120 - 40 = 80$.

(b) Multiplicera båda sidor av (1.9) med x:

$$\frac{2y}{3x}x = \frac{a}{b}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2y}{3} = \frac{a}{b}x$$

Multiplicera båda sidor med $\frac{3}{2}$:

$$\frac{3}{2}\frac{2y}{3} = \frac{3}{2}\frac{a}{b}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}\frac{2}{3}y = \frac{3a}{2b}x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3a}{2b}x$$

Sätt in högerledet istället för y i (1.8):

$$ax+b\frac{3a}{2b}x = c \quad \Leftrightarrow \quad ax+\frac{3a}{2}x = c \quad \Leftrightarrow \quad 2ax+3ax = 2c \quad \Leftrightarrow \quad (2+3)ax = 2c$$

$$\Leftrightarrow \quad 5ax = 2c \quad \Leftrightarrow \quad x^* = \frac{2c}{5a}$$

Sätt in detta i uttrycket för y:

$$y^* = \frac{3a}{2b}\frac{2c}{5a} = \frac{3a2c}{2b5a} = \frac{3c}{5b}.$$

Svar till Avsnitt 2.5

Övning 2.5.1

(a) $\frac{dy}{dx} = 12,5 \cdot 2x = 25x$

(b) $\frac{dy}{dx} = -3\frac{1}{2} \cdot 2x = -3x$

(c) Skriv först om funktionen som $y = ax - bx^2 - cx^2$. Sedan har vi
$\frac{dy}{dx} = a - b2x - c2x = a - 2bx - 2cx = a - 2(b + c)x.$

Övning 2.5.2

(a) $\pi_1' = 60 - 3 \cdot 2x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^* = 10$

(b) $\pi_2' = 100 - 2 \cdot 2x - 20 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^* = 20$

(c) $\pi_3' = 60 - 2x - 4x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^* = 10$