Solows ekvation med teknologisk utveckling

Nu inför vi teknologifaktorn E i produktionsfunktionen och antar att den framför allt har en inverkan på arbetskraftens produktivitet. Produktionsfunktionen blir då

$$Y = F(K, E \cdot L), \tag{1}$$

där E är *arbetskraftens effektivitet*. Över tiden har den ökat tack vare löpande band och mer avancerade maskiner och datorer som har gjort att man får ut mer per enhet arbete.

Vi antar att ökningen i E är exogen och att tillväxttakten är konstant lika med g. Det kan uttryckas som att

$$\frac{\Delta E}{E} = g.$$

En konsekvens av detta är att

$$\frac{\Delta(E \cdot L)}{E \cdot L} = \frac{\Delta E}{E} + \frac{\Delta L}{L} = g + n.$$

Tillväxttakten i den effektiva arbetskraften är alltså summan av befolkningstillväxten och tillväxttakten i teknologifaktorn.

I detta avsnitt kommer följande uttryck att vara konstanta på lång sikt:

$$k = \frac{K}{E \cdot L} \qquad \text{och} \qquad y = \frac{Y}{E \cdot L}. \tag{2}$$

Detta är kapital respektive produktion per *effektiv* arbetare. (Observera att vi hade annorlunda definitioner i det föregående kapitlet.)

Produktionen per effektiv arbetare är en funktion av kapitalet per effektiv arbetare:

$$y = f(k). \tag{3}$$

Precis som i det föregående kapitlet har denna funktion en positiv men avtagande lutning.

Solows ekvation blir nu

$$\Delta k = sf(k) - (\delta + n + g)k. \tag{4}$$

Ersättningsinvesteringarna är nu högre, eftersom även ökningen i E måste balanseras av en ökning i K (om inte $K/(EL)$ ska falla).

Även denna version av Solow-modellen är stabil: k 'dras mot' steady-state-värdet k^* varifrån man än startar. Detta visas i **Figure 9–1**.

Låt oss nu titta närmare på effekterna av att ta med teknologifaktorn E i Solow-ekvationen. I steady-state har vi $y^* = f(k^*)$. Detta kan skrivas som

$$\frac{Y}{E \cdot L} = f(k^*)$$

Vi ser att produktionen per effektiv arbetare är konstant, eftersom högerledet är konstant. Men det är mer intressant att se hur produktionen per capita utvecklas på lång sikt. Därför multiplicerar vi med E och får

$$\frac{Y}{L} = E(t) \cdot f(k^*).$$

Här har vi skrivit ut att E är en funktion av tiden (t) för att understryka att E växer med tiden. Detta innebär att inkomsten per capita växer i samma takt som E i steady state. Med andra ord har vi

$$g_{Y/L} = g$$

på lång sikt. Först här får vi alltså en långsiktig tillväxt i inkomsten per capita. Detta sker tack vare den exogena teknologiska utveckling som får E att växa. Även konsumtionen per capita kommer att växa med takten g.

Av de tre versioner av Solows modell som vi har gått igenom är detta den som stämmer bäst överens med den ekonomiska statistiken. Förhoppningsvis var det ändå nyttigt att börja med det enklaste fallet och sedan gradvis införa mer detaljer.

Exempel

Låt oss utgå från den generella Cobb-Douglas-funktionen

$$Y = AK^{\alpha} \left(E \cdot L\right)^{1-\alpha}.$$

Eftersom teknologifaktorn multipliceras med L, kallas detta *labor-augmenting technological progress.*

Man kan visa att resultatet av att dividera båda sidor med EL blir[11]

$$y = Ak^{\alpha}.$$

[11] Vi utnyttjar att $(EL)^{\alpha}(EL)^{1-\alpha} = (EL)^{\alpha+1-\alpha} = (EL)^1$ och får

$$y = \frac{Y}{EL} = \frac{AK^{\alpha}\left(EL\right)^{1-\alpha}}{EL} = \frac{AK^{\alpha}\left(EL\right)^{1-\alpha}}{(EL)^{\alpha}(EL)^{1-\alpha}} = A\frac{K^{\alpha}}{(EL)^{\alpha}} \cdot \frac{(EL)^{1-\alpha}}{(EL)^{1-\alpha}} = A\left(\frac{K}{EL}\right)^{\alpha} = Ak^{\alpha}.$$

Vi använder här definitionerna i (2). Detta gör att (4) blir

$$\Delta k = sAk^{\alpha} - (\delta + n + g)k. \tag{5}$$

Detta är det mest komplicerade exempel på Solow-ekvationen som vi kommer att se i denna kurs. De härledningar som vi nu kommer att göra är kanske lite väl svåra, även om de liknar det som vi har gjort tidigare. Men resultaten är ganska bra att ha och ni behöver inte kunna göra dessa härledningar själva.

Kapitalstocken kommer på sikt till steady-state, så vi skriver ned villkoret för detta tillstånd:

$$sAk^{\alpha} = (\delta + n + g)k. \tag{6}$$

Vi löser nu ut k. Först gör vi en omskrivning:

$$\frac{sA}{\delta + n + g} = \frac{k}{k^{\alpha}} = kk^{-\alpha} = k^{1-\alpha}$$

Höj upp båda sidor med exponenten $\frac{1}{1-\alpha}$:

$$\left(\frac{sA}{\delta + n + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(k^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} = k^{1}$$

$$k^{*} = \left(\frac{sA}{\delta + n + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{7}$$

Vi ser att kapitalstocken i steady state är stor om sparkvoten är hög eller om den konstanta produktivitetsfaktorn A är stor. Däremot är k^* liten om det finns stora behov av ersättningsinvesteringar, uttryckta i höga värden på δ, n eller g.

Vi sätter in detta resultat i produktionsfunktionen:

$$y^{*} = A\left(k^{*}\right)^{\alpha} = A\left(\left(\frac{sA}{\delta + n + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha}.$$

$$y^{*} = A\left(\frac{sA}{\delta + n + g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{8}$$

I tidigare exempel har vi jobbat med förenklade versioner av (7) och (8). Vi har t ex nästan alltid satt $A = 1$. När det gäller exponenten i produktionsfunktionen har vi mest valt $\alpha = 1/2$ eller $\alpha = 1/3$. I det föregående kapitlet satte vi $g = 0$ och till en början även $n = 0$.

Här kommer en uppgift för er:
Utgå från följande version av Solows ekvation:

$$\Delta k = s\sqrt{k} - (\delta + n + g)\, k.$$

Detta innebär att vi sätter $\alpha = 1/2$ i (5)–(8).

(a) Antag att $s = 0,21$, $\delta = 0,04$, $g = 0,02$ och $n = 0,01$. Skriv ned steady-state-villkoret och lös ut k^*. Beräkna också y^*.

(b) Hur förändras k^* och y^* om sparkvoten ökar till $0,28$?

(c) Hur utvecklas inkomsten per capita i steady state, när $s = 0,21$ respektive $s = 0,28$?

Svar

(a) I Steady-state: $0,21 \cdot \sqrt{k} = 0,07 \cdot k \Leftrightarrow 3 = \sqrt{k}$. $k^* = 9$. $y^* = \sqrt{9} = 3$.

(b) I Steady-state: $0,28 \cdot \sqrt{k} = 0,07 \cdot k \Leftrightarrow 4 = \sqrt{k}$. $k^* = 16$. $y^* = \sqrt{16} = 4$.

(c) I steady-state är $y = f(k^*)$. I detta fall har vi $y = \sqrt{k^*}$. Då $y = Y/(EL)$, är inkomsten per capita

$$\frac{Y}{L} = E(t) \cdot \sqrt{k^*}.$$

Tillväxttakten i inkomsten per kapita bestäms helt av tillväxttakten för E, dvs g. Denna **takt** påverkas inte av s.

Däremot påverkas **nivån** för inkomsten per capita av sparkvoten. När $s = 0,21$ resp. $s = 0,28$ får vi

$$\frac{Y}{L} = E(t) \cdot 3 \qquad \text{respektive} \qquad \frac{Y}{L} = E(t) \cdot 4.$$

När s är större ligger den långsiktiga tillväxtbanan hela tiden på en högre nivå.