Solows ekvation

Kapitel 8 börjar med en lång härledning, som resulterar i Solows ekvation. Ett sätt att tillägna sig materialet här är att hoppa direkt till denna ekvation (ekvation 6 på sidan 10 i föreläsningsanteckningarna) och försöka förstå vad den säger. Förhoppningsvis tycker ni efter en stund att den verkar rimlig och då kan ni gå tillbaka till härledningarna.

I tillväxtteorin kommer de flesta variablerna att växa hela tiden. Därför jobbar vi med kvoter mellan variabler, t ex

$$k = \frac{K}{L}, \quad y = \frac{Y}{L}, \quad c = \frac{C}{L}, \quad \text{och} \quad i = \frac{I}{L}.$$

I det tredje avsnittet av detta kapitel kommer L att växa i en konstant takt (n). På lång sikt kommer då K, Y, C och I att växa i samma takt. Därmed blir k, y, c och i konstanta längs den långsiktiga tillväxtbanan.

I kapitlets första avsnitt (som vi ägnar oss här) finns ingen befolkningstillväxt, dvs L är konstant. Det innebär att även K, Y, C och I kommer att vara konstanta på lång sikt. Det är ändå lämpligt att introducera kvoterna mellan variablerna redan nu, så att vi kan börja med den allra enklaste varianten av Solows ekvation.

Observera att Mankiw kallar t ex $k = K/L$ för 'kapital per arbetare'. Jag använder både 'kapital per arbetare' och 'kapital per capita' synonymt. Det betyder att jag indirekt antar att alla medborgare arbetar.

En sista sak att notera innan vi tittar på Solows ekvation är att produktionen per capita (och per arbetare) kan beskrivas med hjälp av produktionsfunktionen:

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K,L)}{L}.$$

Då vi antar konstant skalavkastning i produktionen kan detta reduceras till något mycket enklare, nämligen

$$y = f(k).$$

Produktionen per capita är alltså en funktion av kapitalet per capita. Funktionen $f(k)$ har positiv, men avtagande lutning, vilket ses i **Figure 8–1**. Denna lutning är lika med marginalprodukten av kapital. Marginalprodukten är mindre när när k är stort; vi har alltså avtagande marginell avkastning av k. Det yttrar sig i att kurvan för $f(k)$ blir flackare när k ökar.

När befolkningen (och arbetskraften) är konstant, som i bokens avsnitt 8-1, är Solows ekvation

$$\Delta k = sf(k) - \delta k. \tag{1}$$

Denna ekvation säger att förändringen i kapital per capita är lika med bruttoinvesteringarna (dvs sparandet) per capita minus ersättningsinvesteringarna per capita.

Den ekonomiska tillväxten kan nu förstås med hjälp av en figur. I bokens **Figure 8–4** illustreras de två termerna i högerledet av (1) med varsin kurva. Investeringskurvan, $sf(k)$, startar med en brant lutning nära origo men blir sedan allt flackare när k ökar, pga den avtagande marginalprodukten av kapital. Deprecieringskurvan, δk, är en rät linje. Dess positiva lutning innebär att ju större kapitalstocken är, desto mer kapital är det som förslits. Den vertikala skillnaden mellan kurvorna är Δk. Det finns en nivå på k som gör att båda kurvorna skär varandra. Vi betecknar den nivån med k^*.

Mer formellt kan steady-state-nivån k^* fås fram genom att vi sätter $\Delta k = 0$ i (1). Det ger

$$0 = sf(k^*) - \delta k^*,$$

eller

$$sf(k^*) = \delta k^*. \tag{2}$$

Denna ekvation säger att sparandet precis räcker till de ersättningsinvesteringar som är nödvändiga för att hålla k på nivån k^*, när ekonomin är i steady-state. Man kallar därför investeringsnivån $sf(k^*)$ för 'break-even investment'.

Boken visar att k alltid kommer att gå mot k^*, och stanna där, varifrån man än börjar. Vi kan därför koncentrera oss på att analysera steady state.

Exempel

Låt oss titta lite närmare på Cobb-Douglas-funktionen

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}.$$

Man kan visa att resultatet av att dividera båda sidor med L blir[6]

$$y = Ak^{\alpha}.$$

Under kursen använder vi sällan denna generella version av Cobb-Douglas-funktionen. Istället antar vi ofta att $\alpha = 1/2$, så att

$$Y = AK^{1/2}L^{1/2} = A\sqrt{K}\sqrt{L} \quad \text{och då blir} \quad y = Ak^{1/2} = A\sqrt{k}.$$

[6] Vi får

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L^{\alpha}L^{1-\alpha}} = A\frac{K^{\alpha}}{L^{\alpha}} \cdot \frac{L^{1-\alpha}}{L^{1-\alpha}} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = Ak^{\alpha}.$$

I ett par övningar från boken har vi

$$Y = K^{1/3}L^{2/3} \quad \text{respektive} \quad Y = K^{0,4}L^{0,6}.$$

och då får vi

$$y = k^{1/3} \quad \text{respektive} \quad y = k^{0,4}.$$

Observera att man här har valt att sätta konstanten $A = 1$.

Vi antar nu att produktionsteknologin beskrivs av Cobb-Douglas-funktionen $Y = \sqrt{K} \cdot \sqrt{L}$, så att $y = \sqrt{k}$. Solows ekvation (1) blir då

$$\Delta k = s\sqrt{k} - \delta k. \tag{3}$$

I steady-state har vi $s\sqrt{k} = \delta k$. Detta kan skrivas om som

$$\frac{s}{\delta} = \frac{k}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k}}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}.$$

Kvadrering av båda sidor ger

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta}\right)^2. \tag{4}$$

Vi ser att k^* ökar om s blir större eller om δ blir mindre. Mer sparande och mindre förslitning ger alltså en högre långsiktig kapitalstock per capita.

Eftersom $y = \sqrt{k}$ har vi

$$y^* = \frac{s}{\delta}. \tag{5}$$

Vi får alltså högre långsiktig produktion per capita, om s blir större eller om δ blir mindre. Slutligen följer det av sambandet $c = (1 - s)y$ att

$$c^* = (1 - s)\frac{s}{\delta} = \frac{(1 - s)s}{\delta}$$

$$c^* = \frac{s - s^2}{\delta}. \tag{6}$$

Vi får en högre konsumtion per capita, om δ blir mindre. Effekten av en högre sparkvot är inte entydig.

Här kommer en uppgift för er:

Antag att Solows ekvation är

$$\Delta k = s\sqrt{k} - \delta k. \tag{3}$$

Antag också att $s = 0,28$ och att $\delta = 0,04$.

1. Skriv ned Solows ekvation i detta fall.
2. Skriv ned steady-state-villkoret.
3. Härled k^* från steady-state-villkoret.
4. Bekräfta att formeln i (4) ger samma resultat.
5. Härled $y*$ från produktionsfunktionen $y = \sqrt{k}$.
6. Bekräfta att formeln i (5) ger samma resultat.
7. Härled c^* från konsumtionsfunktionen $c = (1 - s)y$.
8. Bekräfta att formeln i (6) ger samma resultat.

Svar

1. $\Delta k = 0,28 \cdot \sqrt{k} - 0,04 \cdot k$.
2. $0,28 \cdot \sqrt{k} = 0,04 \cdot k$.
3. $k^* = 7^2 = 49$.
4. $k^* = \left(\frac{0{,}28}{0{,}04}\right)^2 = 7^2 = 49$.
5. $y^* = 7$.
6. $y^* = \frac{0{,}28}{0{,}04} = 7$.
7. $c^* = (1 - s)y^* = (1 - 0,28)7 = 5,04$.
8. $c^* = \frac{s-s^2}{\delta} = \frac{0{,}28-0{,}28^2}{0{,}04} = 5,04$

Formlerna (4)—(6) ger alltså vissa svar på ett bekvämt sätt, men det är bättre att öva sig på att härleda fram svaren från grunden, så att man inte glömmer bort varifrån de kommer.

Vi har också

$$i^* = s \cdot \sqrt{k^*} = s \cdot y^* = 0,28 \cdot 7 = 1,96 \quad \text{och} \quad \delta k^* = 0,04 \cdot 49 = 1,96.$$

Vi kan alltså bekräfta att uttrycken på båda sidorna av steady-state-vilkoret är lika stora. Slutligen vet vi att

$$c + i = (1 - s)y + sy = y.$$

I vårt steady state är

$$c^* + i^* = 5,05 + 1,96 = 7 = y^*.$$