Solows ekvation med befolkningstillväxt

Vi antar nu att befolkningens (och arbetskraftens) tillväxttakt är konstant och lika med n. Det betyder att

$$\frac{\Delta L}{L} = n.$$

Efter en del härledningar kommer man fram till att Solows ekvation i detta fall blir

$$\Delta k = sf(k) - (\delta + n)k. \tag{1}$$

Ekvationen modifieras alltså bara genom att vi lägger till termen $-nk$. Denna nya term representerar de investeringar som måste göras för att utrusta nya arbetare med kapital (när k ska hållas konstant).

Trots denna modifiering av Solow-modellen är den fortfarande stabil, eftersom kurvorna ligger ungefär på samma sätt i **Figure 8–10** som i **Figure 8–4**. Precis som tidigare dras k till steady-state-värdet k^*, var vi än börjar. En skillnad är att k^* nu ges av

$$sf(k^*) = (\delta + n)k^*. \tag{2}$$

Innebörden av detta är återigen att investeringarna (vänsterledet) ligger på en break-even-nivå, så att de precis räcker till för att hålla k konstant.

Ekvation (2) kan ge intrycket att inget händer när vi har nått s.s., men det stämmer inte. Det är sant att k^* är konstant, men vi måste komma ihåg definitionen

$$k = \frac{K}{L}.$$

Även om VL är konstant så kommer variablerna i HL att ändras. Eftersom L växer i takten n måste även K växa i samma takt för att K/L ska vara konstant. Vi sammanfattar detta på följande sätt:

$$\text{När} \quad k = k^* \quad \text{har vi} \quad g_K = g_L = n.$$

Även Y kommer att växa på lång sikt. För att se detta kan vi börja med att konstatera att

$$(y =) \qquad \frac{Y}{L} = f\left(k^*\right)$$

är konstant i steady-state. Detta innebär att Y växer i samma takt som L, så tillväxttakten i Y är n i steady state. Även C och I växer i denna takt.

Exempel

Vi har tidigare sett att om produktionsfunktionen är

$$Y = K^{1/3}L^{2/3} \qquad \text{så är} \qquad y = k^{1/3}.$$

Med en sådan produktionsfunktion blir Solows ekvation (1)

$$\Delta k = sk^{1/3} - (\delta + n)k. \tag{3}$$

Steady-state-villkoret (2) blir nu

$$sk^{1/3} = (\delta + n)k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s}{\delta + n} = \frac{k}{k^{1/3}}.$$

Kom ihåg att $k^{1/3}$ kallas för tredje roten ur k. Det innebär bl a att $k^{1/3} \cdot k^{1/3} \cdot k^{1/3} = k$. Alltså får vi

$$\frac{s}{\delta + n} = \frac{k}{k^{1/3}} = \frac{k^{1/3} \cdot k^{1/3} \cdot k^{1/3}}{k^{1/3}} = \frac{k^{1/3} \cdot k^{1/3}}{1} = \left(k^{\frac{1}{3}}\right)^2 = k^{\frac{2}{3}}.$$

Höj upp båda sidorna (första och sista ledet) med 3/2:

$$\left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(k^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = k^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} = k^1.$$

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{4}$$

Insättning av detta resultat i produktionsfunktionen $y = k^{1/3}$ ger att

$$y^* = (k^*)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \left(\frac{s}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Här kommer en uppgift för er:

Utgå från ekvation (3). Antag att $s = 0,24$, $\delta = 0,05$ och $n = 0,01$.

1. Hur ser Solows ekvation ut i detta fall?
2. Skriv ned steady-state-villkoret.
3. Beräkna k^*.
4. Beräkna y^*.
5. Beräkna c^* och i^*.

Svar

1. $\Delta k = 0,24k^{1/3} - 0,06k$
2. $0,24k^{1/3} = 0,06k$
3. $k^* = 8$.
4. $y^* = 2$.
5. $c^* = 1,52$ och $i^* = 0,48$ $(c^* + i^* = y^*)$.