Gyllene regeln

Den grundläggande frågan i detta avsnitt är: Vilken nivå på k^* gör att c^* är den högsta möjliga? Observera att vi inför '*' på variablerna direkt: vi kommer framför allt att jämföra steady-states (s.s.).

I boken och i föreläsningsanteckningarna visas det att konsumtionen är lika med

$$c^* = f(k^*) - \delta k^* \tag{1}$$

när ekonomin är i s.s. För att hitta den maximal nivån på c^* måste man alltså maximera differensen mellan termerna i högerledet av (1). Detta illustreras i Figure 8–6 i boken. Där ser man att c^* maximeras när skillnaden mellan produktionen och ersättningsinvesteringarna är som störst. För detta krävs det att kurvorna i figuren har samma lutning.

Lutningen på δk^*-kurvan är δ, medan lutningen på $f(k^*)$-kurvan är *MPK* eller derivatan av $f(k^*)$. Således blir villkoret för en maximal c^* att

$$MPK = \delta. \tag{2}$$

Då k ingår i *MPK*, ger detta villkor **Gyllene-regel-kapitalstocken**, som vi ska se i ett exempel nedan. Den betecknas med k^*_{gold} och är alltså den nivå på k^* som gör att konsumtionen per capita maximeras i s.s.

När man väl vet vad k^*_{gold} är blir nästa steg att välja en sparkvot som gör att man hamnar vid denna nivå på k^*. Det eftersökta värdet på s ges av s.s-villkoret

$$s_{\text{gold}} f(k^*_{\text{gold}}) = \delta k^*_{\text{gold}}. \tag{3}$$

Denna ekvation ger s_{gold}, givet att vi vet vad k^*_{gold} är. I bokens Figure 8–7 illustreras hur s_{gold} leder till att c^* maximeras.

Ett Exempel

Vi fortsätter att använda det exempel som vi utvecklade i anslutning till avsnitt 8–1. Där antog vi att $y = \sqrt{k}$. Därmed blir (1)

$$c^* = \sqrt{k^*} - \delta k^*. \tag{4}$$

I detta fall är marginalprodukten av kapital[7]

$$MPK = \frac{1}{2\sqrt{k}},$$

[7] Då $y = \sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}$ har vi derivatan

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}k} = \frac{1}{2}k^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

vilket gör att Gyllene-regeln-villkoret (2) blir

$$\frac{1}{2\sqrt{k^*_{\text{gold}}}} = \delta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\delta} = \sqrt{k^*_{\text{gold}}}.$$

Vi löser ut k^*_{gold}:

$$k^*_{\text{gold}} = \frac{1}{4\delta^2}. \tag{5}$$

Vi använder nu $y = \sqrt{k}$ och får direkt att

$$y^*_{\text{gold}} = \sqrt{\frac{1}{4\delta^2}} = \frac{1}{2\delta}. \tag{6}$$

Insättning av (5) och (6) i (4) ger

$$c^*_{\text{gold}} = \frac{1}{2\delta} - \delta\frac{1}{4\delta^2} = \frac{2}{4\delta} - \frac{1}{4\delta}$$

$$c^*_{\text{gold}} = \frac{1}{4\delta}. \tag{7}$$

Det sista steget är att hitta den sparkvot som gör att $k^* = k^*_{\text{gold}}$. Vi hittar den genom att använda k^*_{gold} och $y = \sqrt{k}$ i (3):

$$s_{\text{gold}}\sqrt{k^*_{\text{gold}}} = \delta k^*_{\text{gold}}. \tag{8}$$

Detta kan förenklas till

$$s_{\text{gold}} = \delta\frac{k^*_{\text{gold}}}{\sqrt{k^*_{\text{gold}}}} = \delta\frac{\sqrt{k^*_{\text{gold}}}\sqrt{k^*_{\text{gold}}}}{\sqrt{k^*_{\text{gold}}}} = \delta\sqrt{k^*_{\text{gold}}}.$$

Använd (5):

$$s_{\text{gold}} = \delta\sqrt{k^*_{\text{gold}}} = \delta\sqrt{\frac{1}{4\delta^2}} = \delta\frac{1}{2\delta}$$

$$s_{\text{gold}} = \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Den ‘optimala’ sparkvoten visar sig alltså vara oberoende av δ.

(Övning på nästa sida)

Som en övning för er återvänder vi till exemplet som vi studerade i anslutning till avsnitt 8–1, där $y = \sqrt{k}$ och $\delta = 0,04$. I det exemplet antog vi också att $s = 0,28$, men här har vi ju sökt efter en konsumtions-maximerande sparkvot och kommit fram till att den är $s = 0,5$.

1. Skriv ned motsvarigheten till (2) för detta fall.
2. Lös ut k^*_{gold} från detta villkor.
3. Bekräfta att formeln i (5) ger samma resultat.
4. Beräkna y^*_{gold}.
5. Använd de beräknade värdena för k^*_{gold} och y^*_{gold} i (1) för att beräkna c^*_{gold}.
6. Bekräfta att formeln i (7) ger samma resultat.

Svar

1. $\frac{1}{2\sqrt{k}} = 0,04$.
2. $k^*_{\text{gold}} = 12,5^2 = 156,25$.
3. $k^*_{\text{gold}} = \frac{1}{0{,}0064} = 156,25$
4. $y^*_{\text{gold}} = \frac{1}{0{,}08} = 12,5$.
5. $c^*_{\text{gold}} = 12,5 - 0,04 \cdot 156,25 = 6,25$.
6. $c^*_{\text{gold}} = \frac{1}{0{,}16} = 6,25$.