Matematik: Proportionella Förändringar

Antag att en ekonomisk variabel x har värdet x_0 vid tidpunkt 0 och värdet x_1 vid tidpunkt 1. Vi säger då att **förändringen** mellan de två tidpunkterna är

$$\Delta x = x_1 - x_0.$$

Om $x_1 > x_0$, dvs x ökar mellan tidpunkterna, så har vi $\Delta x > 0$, dvs förändringen är positiv.

Den **proportionella förändringen** sätter förändringen i relation till det ursprungliga värdet:

$$\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{x_1 - x_0}{x_0} = g_x.$$

Vi kallar ofta g_x för **tillväxttakten**, även om den är negativ. Låt oss till exempel anta att $x_0 = 1000$ och $x_1 = 1013$. Då är tillväxttakten

$$g_x = \frac{1013 - 1000}{1000} = \frac{13}{1000} = 0,013 = 1,3\ \%$$

Antag nu att z är produkten av de två variablerna x och y. Det vill säga $z = x \cdot y$. Även y antar olika värden vi de två tidpunkterna, nämligen y_0 respektive y_1. Det innebär i sin tur att z antar värdena $z_0 = x_0 y_0$ respektive $z_1 = x_1 y_1$.

Till exempel kan x och y vara pris respektive kvantitet på en vara som ett företag säljer. Då är z intäkten. Förändringen i intäkten mellan de två tidpunkterna beror då på hur de två komponenterna, x och y, förändras.

Vi kan skriva förändringen i z som

$$\Delta z = z_1 - z_0 = x_1 y_1 - x_0 y_0.$$

Den proportionella förändringen i z är

$$\frac{\Delta z}{z_0} = \frac{z_1 - z_0}{z_0} = \frac{x_1 y_1 - x_0 y_0}{x_0 y_0}. \tag{1}$$

Efter lite omskrivningar får man[5]

$$\frac{\Delta z}{z_0} = \frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{\Delta y}{y_0} + \frac{\Delta x}{x_0}.$$

[5]Förläng täljaren med $x_1 y_0 - x_1 y_0$:

$$\frac{\Delta z}{z_0} = \frac{x_1 y_1 - x_0 y_0 + x_1 y_0 - x_1 y_0}{x_0 y_0} = \frac{x_1 y_1 - x_1 y_0 + x_1 y_0 - x_0 y_0}{x_0 y_0} = \frac{x_1 (y_1 - y_0) + (x_1 - x_0)\, y_0}{x_0 y_0} =$$

$$\frac{x_1 (y_1 - y_0)}{x_0 y_0} + \frac{(x_1 - x_0)\, y_0}{x_0 y_0} = \frac{x_1}{x_0} \frac{(y_1 - y_0)}{y_0} + \frac{(x_1 - x_0)}{x_0} = \frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{\Delta y}{y_0} + \frac{\Delta x}{x_0}.$$

Om förändringarna är små så är $x_1 \approx x_0$. Då har vi följande *ungefärliga* samband:

$$\frac{\Delta z}{z_0} = \frac{\Delta x}{x_0} + \frac{\Delta y}{y_0} \tag{2}$$

eller

$$g_z = g_x + g_y.$$

Ekvation (1) ger det exakta sambandet men vi föredrar ofta att använda approximationen som ges av ekvation (2) eftersom det gör att uttrycken blir lite enklare.

Låt oss se vad skillnaden mellan (1) och (2) blir i ett numeriskt exempel. Antag att $x_0 = 1000$ och $x_1 = 1013$, som i exemplet ovan, och att $y_0 = 6000$ och $y_1 = 6012$. Den korrekta formeln i ekvation (1) ger då

$$\frac{\Delta z}{z_0} = \frac{x_1 y_1 - x_0 y_0}{x_0 y_0} = \frac{1013 \cdot 6012 - 1000 \cdot 6000}{1000 \cdot 6000} = \frac{6090156 - 6000000}{6000000} = \frac{90156}{6000000} = 0,015026.$$

Den approximativa formeln i (2) ger

$$\frac{\Delta z}{z_0} = \frac{\Delta y}{y_0} + \frac{\Delta x}{x_0} = \frac{6012 - 6000}{6000} + \frac{1013 - 1000}{1000} = \frac{12}{6000} + \frac{13}{1000} = 0,002 + 0,013 = 0,015$$

Skillnaden mellan de två beräkningarna är ganska liten. Det beror på att förändringarna är ganska små i förhållande till startvärdena. Vid större förändringar ökar differensen.

Här kommer en uppgift för er:

Antag att $z = x \cdot y$ och att $x_0 = 100$, $x_1 = 102$, $y_0 = 50$ samt $y_1 = 51$.
Visa att $\frac{\Delta z}{z} = 0,0404$ om man använder (1) och att $\frac{\Delta z}{z} = 0,04$ om man använder (2). (Här skriver vi z i stället för z_0 i nämnarna; det får anses underförstått att vi dividerar med det ursprungliga värdet.)