Produktionsfunktionen

Produktionsfunktionen visar hur mycket man kan producera vid olika insatser av produktionsfaktorerna kapital, K, och arbete, L. Vi använder ofta Cobb-Douglas-funktionen:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \tag{C-D}$$

där $0 < \alpha < 1$. Vi betraktar här A som en konstant produktivitetsfaktor.[1]

Marginalprodukten av t ex K säger oss hur mycket Y ökar om man ökar K och samtidigt håller L konstant. Man kan visa att marginalprodukten av K och L i detta fall är[2]

$$MPK = \frac{\partial Y}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = \alpha\frac{Y}{K}$$

respektive

$$MPL = \frac{\partial Y}{\partial L} = AK^{\alpha}(1-\alpha)L^{-\alpha} = (1-\alpha)\,\frac{Y}{L}.$$

Ni behöver inte kunna ta fram dessa uttryck men ni måste förstå dem och kunna använda dem. Om man redan har räknat fram Y är det enklast att använda yttrycken längst till höger. Annars får man sätta in sina värden på K och L i de näst sista uttrycken.

Låt oss nu ta ett exempel med siffror i stället för bokstäver. Antag att $A = 12$ och $\alpha = \frac{1}{3}$. Då får vi

$$Y = 12 \cdot K^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}}.$$

Från föreläsningsanteckningarna vet vi att detta innebär att inkomstandelen till kapital är $\frac{1}{3}$, medan inkomstandelen till arbete är $\frac{2}{3}$. Detta stämmer ganska väl med verkligheten.

Antag också att tillgången på produktionsfaktorer är $K = 64$ och $L = 216$. Då är

$$Y = 12 \cdot 64^{\frac{1}{3}} \cdot 216^{\frac{2}{3}} = 12 \cdot 4 \cdot 36 = 1728.$$

Marginalprodukterna är

$$MPK = \frac{1}{3} \cdot \frac{Y}{K} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1728}{64} = \frac{1}{3} \cdot 27 = 9.$$

och

$$MPL = \frac{2}{3} \cdot \frac{Y}{L} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1728}{216} = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}.$$

[1] I kapitel 9 pratar vi om teknologisk utveckling, som kan uttryckas i att något som motsvarar A växer över tiden.

[2] Då marginalprodukterna är derivator gäller dessa uttryck för små förändringar av K respektive L.

Det är optimalt för företagen att anställa så mycket arbetskraft att $MPL = (W/P)$. Det innebär att den reala löneinkomsten är

$$(W/P) \cdot L = MPL \cdot L = \frac{16}{3} \cdot 216 = 1152.$$

På samma sätt är den reala kapitalinkomsten

$$(R/P) \cdot K = MPK \cdot K = 9 \cdot 64 = 576.$$

Notera att summan av dessa två utbetalningar är lika med den totala produktionen: $1152 + 576 = 1728$. Hela produktionen går alltså åt till att betala produktionsfaktorerna.

Här kommer en liknande uppgift för er: I föreläsningsanteckningarna har vi produktionsfunktionen

$$Y = A \cdot \sqrt{K} \cdot \sqrt{L} = A \cdot K^{1/2} \cdot L^{1/2}.$$

Om vi använder de generella uttrycken för marginalprodukterna ovan får vi

$$MPK = \frac{1}{2} \cdot \frac{Y}{K} \qquad \text{och} \qquad MPL = \frac{1}{2} \cdot \frac{Y}{L}.$$

Antag att $A = 6$, $K = 36$ och $L = 64$.

Visa att $Y = 288$, $MPK = 4$, $MPL = 2,25$ och att båda faktorerna får inkomsten 144.